Analytische

STUDIEN

von

Dr. Oskar Schlömilch

ausserordentlichem Professor an der Universität zu Jena.

Zweite Abtheilung

enthaltend

die Fourier'schen Reihen und Integrale nebst deren wichtigsten Anwendungen.

Leipzig.

Verlag von Wilhelm Engelmann.

1848.

Vorrede.

Es ist ein lange und sorgsam gepflegtes Schooskind meiner Musse, was ich mit dieser Schrift den Freunden feinerer mathematischer Untersuchungen übergebe. Sie enthält die, so weit es mir möglich war, vollständige Darstellung zweier Theorieen, deren hohe wissenschaftliche Bedeutung und vielseitige praktische Anwendbarkeit schon länger die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen haben. Aber eben das Interesse, womit man sie betrachtete, hat auch eine wahre Unzahl von Erörterungen über diesen und jenen einzelnen Punkt aus ihnen hervorgerufen, so dass es heut zu Tage schon einige Mühe und Zeit kostet, um durch das reiche in Zeitschriften und Spezialabhandlungen zerstreute Material hindurch zu dringen. Diese Bemerkung einerseits und der Umstand andererseits, dass die jetzt schon etwas veralteten Quellen jener Lehren (Légendre, *théorie des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes*, und Fourier, *théorie de la chaleur*) wegen ihrer Kostspieligkeit nur wenig verbreitet sind, und neuere umfassende Arbeiten darüber gar nicht existiren, liessen es nicht unpassend erscheinen, eine Darstellung zu geben, welche dem Meister als Hand- und Nachschlagebuch, dem Anfänger aber als Lehrbuch dienen könnte. Um den letzteren Zweck, ohne Störung des ersten, zu erreichen, habe ich alles Das, was nicht als unmittelbar aus den ersten Elementen des höheren Calcüls bekannt vorausgesetzt werden durfte, in den Noten

hinreichend erläutert. Um auch die Bedürfnisse des praktischen Rechners zu befriedigen, sind die nöthigen Zahlentafeln, nebst einer Anleitung zu ihrem Gebrauche, beigegeben worden. Uebrigens wird man vorliegende Schrift nicht blos für eine bunte Zusammenstellung der Arbeiten Anderer ansehen dürfen; das Streben nach Einheit der Form und Strenge der Entwickelung nöthigte mich oft zu Abweichungen vom gewöhnlichen Gedankengange; dass ich aber auch materiell Neues in ziemlich reichem Maasse mittheile, wird man ohne Mühe finden. Besonders erlaube ich mir in dieser Beziehung auf die am Ende des zweiten Heftes auseinander gesetzte Methode zur Reduktion vielfacher Integrale aufmerksam zu machen, die mit überraschender Leichtigkeit auf solche Integrale anwendbar ist, in denen eine willkührliche Funktion sämmtlicher Variabelen vorkommt.

Jena, im September 1847.

Schlömilch.

Inhalt zur ersten Abtheilung.

Seite.

Theorie der Gammafunktionen 1

Cap. I. Die Fundamentaleigenschaften der Gammafunktionen 2

Cap. II. Die Addition und Multiplikation der Gammafunktionen 19

Cap. III. Reihen und Produkte zur Berechnung der Gammafunktionen . . 39

Cap. IV. Die wichtigsten unter den durch Gammafunktionen ausdrückbaren Integrale 59

Cap. V. Reihen, welche mit Hülfe der Gammafunktionen summirt werden können 141

Berechnung und Gebrauch der Gammafunktionentafel 163

Tafel der Logarithmen der Gammafunktionen von 1.000 bis 2.000 . . . 183

Inhalt zur zweiten Abtheilung.

Seite.

Cap. I. Die Fourier'schen Reihen 3

Cap. II. Die Fourier'schen Integrale 72

Anhang 196

Theorie

der

Fourier'schen Reihen und Integrale.

Cap. I.

Die Fourier'schen Reihen.

Unter der grossen Zahl rein analytischer Probleme, auf welche man bei den physikalischen Anwendungen des höheren Calcüls hingewiesen worden ist, befindet sich auch das: eine beliebige Funktion einer einzigen Variablen in eine nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen jener Veränderlichen fortschreitende Reihe zu verwandeln, und man weiss, welche bedeutende Rolle diese Aufgabe in der Untersuchung über die Gestalt schwingender Saiten bei Lagrange und in Fourier's mathematischer Theorie der Wärme gespielt hat. Dass man in der That sehr leicht auf das genannte Problem stossen kann und zwar namentlich bei der Integration gewisser partieller Differenzialgleichungen, möge das folgende, wenn auch sehr einfache, doch hinreichend allgemeine Beispiel zeigen, dessen Anschaulichkeit den Sinn jener Aufgabe recht gut zu erläutern im Stande ist. Es sei zwischen zwei bestimmten Punkten eine materielle krumme Linie einfacher Krümmung, also etwa ein schlaffes irgendwie gekrümmtes Seil, gegeben, ein beliebiger Punkt desselben durch die Coordinaten x, y und die Gestalt der Curve durch die Gleichung $y = f(x)$ bestimmt. Lassen wir auf alle Punkte der materiellen Linie Kräfte wirken, welche eine Veränderung ihrer Gestalt hervorrufen, so werden nach der Zeit t etwa x und u die Coordinaten irgend eines Punktes der Curve sein, wobei u eine noch zu bestimmende Funktion von x und t bildet. Um nun einen speziellen Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass man mit Hülfe mechanischer Betrachtungen gefunden habe, es müsse u die partielle Differenzialgleichung

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}$$

erfüllen, in welcher a eine constante Grösse bezeichnet. (Natürlich kommt es hier gar nicht darauf an, ob es überhaupt solche Kräfte giebt oder nicht, bei welchen die Regeln der Mechanik zu der obigen Differenzialgleichung führen würden.) Will man dieselbe integriren, d. h. u als Funktionen von x und t bestimmen, so kann man sich des bekannten einfachen Verfahrens bedienen, wonach man ihr allgemeines Integral aus den partikulären Integralen derselben zusammensetzt. Nun übersieht man aber leicht, dass $u = A \cos m(x + at)$, worin A und m willkührliche Constanten sind, die Differenzialgleichung befriedigt und hieraus folgt sogleich, dass dieselbe auch durch den allgemeineren Ausdruck

$$u = A_0 + A_1 \cos(x + at) + A_2 \cos 2(x + at) + \ldots$$

erfüllt wird, weil jeder einzelne Bestandtheil desselben ihr genügt. Soll aber diese Auflösung allgemein seiu, so muss sie uns für $t = 0$ auf den ursprünglichen Zustand der Curve, der durch die Gleichung $y = f(x)$ charakterisirt wurde, zurückführen, d. h. es müssen die bisher noch willkührlichen Constanten A_0, A_1, A_2, etc. so bestimmt werden, dass für $t = 0$ das obige u in y übergeht, also

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots. \qquad (1)$$

wird, was in Zeichen das Nämliche ist, wie die früher in Worten ausgesprochene Aufgabe. — Wäre man dagegen von der partikulären Auflösung $u = B \sin m(x + at)$ ausgegangen, so würde man auf die Forderung gekommen sein, B_1, B_2, B_3, etc. so zu bestimmen, dass

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots \qquad (2)$$

wird, welche der vorigen ganz analog ist. — Aus der Fassung der ganzen Aufgabe gehen übrigens noch einige Bemerkungen hinsichtlich der Natur der Funktion $f(x)$ und der Art der Auflösung hervor, die für das Folgende von Wichtigkeit sind. Da nämlich von der in Rede stehenden Curve nur diejenige Partie betrachtet wird, welche zwischen zwei bestimmten Punkten, denen etwa die Abscissen α und β entsprechen mögeu, enthalten ist, so versteht sich von selbst, dass wir die oben ausgesprochenen Aufgaben gar nicht im Allgemeinen, d. h. für alle möglichen x, sondern nur so zu lösen haben, dass die Gleichungen (1) und (2) für alle die Werthe von x bestehen, welche in das Intervall $x = \alpha$ bis $x = \beta$ fallen; ferner ist klar, dass jedem bestimmten

x zwischen α und β nur ein einziges y entsprechen darf, dass wir also immer nur einen Zweig der Curve $y = f(x)$ auf einmal betrachten werden, wenn mehrere solche Zweige vorhanden sein sollten, und endlich müssen wir die krumme Linie als eine während des Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ununterbrochen fortlaufende, d. h. als eine stetige voraussetzen. Damit ist aber nicht gesagt, dass y immer nach einem und dem nämlichen Gesetze von x abhängig sei und wir können daher immerhin annehmen, dass in verschiedenen Theilen jenes Intervalles y auf verschiedene Weise aus x gebildet, also z. B. die Curve aus einem parabolischen und einem cykloidalischen Bogen etc. zusammengesetzt sei, wenn nur diese verschiedenen Stücke ohne Unterbrechung aneinander gereiht sind. Ja, was noch mehr ist, wir haben gar nicht einmal nöthig, eine mathematisch ausdrückbare Abhängigkeit des y von x überhaupt nur vorauszusetzen, denn es wäre möglich, dass man durch einen beliebigen ganz regellosen Zug eine innerhalb des Intervalles $x = \alpha$ bis $x = \beta$ zusammenhängende Curve zu Stande gebracht hätte, die sich durch keine mathematische Funktion $y = f(x)$ ausdrücken liesse. Wir verstehen demnach im Folgenden unter der Gleichung $y = f(x)$ weiter nichts, als dass jedem bestimmten x zwischen α und β ein bestimmtes endliches y entspricht, gleichviel wo man das Letztere herbekommen hat.

§. 1.

Wenn überhaupt eine Lösung der in den Gleichungen

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots \quad (1)$$

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots \quad (2)$$

ausgesprochenen Aufgaben möglich sein soll, so kann dieselbe sicher nur innerhalb eines gewissen Intervalles für x existiren. Bezeichnen wir nämlich die Summen der Reihen rechts, ganz abgesehen von der links stehenden willkührlichen Funktion, mit $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$, so erhellt auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichungen:

$$\Phi(-x) = \Phi(x), \quad \Phi(\pi+x) = \Phi(\pi-x), \quad \Phi(2\pi+x) = \Phi(2\pi-x), \text{ etc.}$$

$$\Psi(-x) = -\Psi(x), \quad \Psi(x) = \Psi(2\pi+x) = \Psi(4\pi+x), \text{ etc.}$$

mit einem Worte, die Funktionon $\Phi(x)$ uud $\Psi(x)$ haben ganz die

Eigenschaften wie ein Ausdruck von der Form $\cos mx$ oder $\sin mx$, wenn m darin eine ganze positive Zahl bedeutet; besitzt nun $f(x)$ nicht dieselben Eigenschaften — und diess setzen wir natürlich nicht voraus —, so können die Gleichungen (1) und (2) höchstens innerhalb eines gewissen Intervalles bestehen, und namentlich geht aus den Eigenschaften $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $\Phi(\pi + x) = \Phi(\pi - x)$ hervor, dass zwischen $f(x)$ und $\Phi(x)$ über die Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ hinaus im Allgemeinen keine Identität mehr stattfinden kann. Ebenso leicht übersieht man, dass wegen $\Psi(-x) = -\Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\pi) = 0$ die Gleichung $f(x) = \Psi(x)$ höchstens für alle zwischen 0 und π fallende Werthe, aber weder für $x \leqq 0$ noch für $x \geqq \pi$ Bestand haben kann.

Gesetzt nun, man wüsste, dass die Auflösung unserer Aufgaben für alle innerhalb des Intervalles $x = 0$ bis $x = \pi$ liegenden Werthe von x möglich sei, so würde es sehr leicht sein, die Werthe der noch unbestimmten Coeffizienten A und B aufzufinden. Handelte es sich z. B. um den Werth von A_n in der Gleichung

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots$$

so multiplizire man die ganze Gleichung mit $2\cos nx$ und zerlege jedes Cosinusprodukt in eine Cosinussumme; es wird so

$$\begin{aligned} 2f(x)\cos mx = 2A_0 \cos mx &+ A_1\left[\cos(m-1)x + \cos(m+1)x\right] \\ &+ A_2\left[\cos(m-2)x + \cos(m+2)x\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &+ A_n\left[1 + \cos 2nx\right] \\ &+ A_{n+1}\left[\cos x + \cos(2n+1)x\right] \\ &+ A_{n+2}\left[\cos 2x + \cos(2n+2)x\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Erinnert man sich nun, dass für jedes ganze positive m

$$\int_0^\pi \cos mx\, dx = 0$$

ist, so erhellt auf der Stelle, dass man hier alle Glieder mit Ausnahme von $A_n \cdot 1$ wegschaffen kann, wenn man die ganze Gleichung mit dx

multiplizirt und darauf innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ integrirt *), was natürlich stillschweigend voraussetzt, dass bei dieser Ausdehnung des x die Existenz der ganzen Gleichung nicht aufhört. Es folgt jetzt

$$2\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = A_n\int_0^\pi dx$$

oder

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx\,. \qquad (3)$$

Diese Bestimmung ändert sich nur in dem Falle $n = 0$ etwas; multiplizirt man da die Gleichung (1) blos mit dx und integrirt ebenso wie vorher; so wird

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$$

---

*) Man könnte für den ersten Augenblick glauben, dass die hier postulirte Integration mit der Eingangs vorausgesetzten Regellosigkeit von $f(x)$ in Widerspruch stehe, indem man sagte, wer überhaupt ein Integral von der Form

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$$

bestimmen will, setzt voraus, dass es eine Funktion $\psi(x)$ gebe, welche wenigstens innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ die Eigenschaft

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x)$$

besitzt und demnach doch mathematisch ausdrückbar scheint. Hierauf ist die ganz einfache Antwort: die obige Definition des bestimmten Integrales ist eine indirekte, wie auch die des unbestimmten Integrales, und eben deswegen die untergeordnetere; die direkte und allgemeinere Definition aber erklärt das bestimmte Integral für die Fläche, welche von der Curve, deren Gleichung $y = \varphi(x)$ ist, dem Stücke $b - a$ der Abscissenachse und den Ordinaten a, b begränzt wird. Diese letztere Definition passt auf alle noch so regellosen Funktionen $\varphi(x)$ oder Curven und liegt der ganzen obigen Betrachtung zu Grunde.

also A_0 nur der Hälfte desjenigen Werthes gleich, den die Formel (3) für $n = 0$ geben würde. Wir können demnach auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots . \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ebenso leicht ergiebt sich aus der Gleichung (2), wenn man dieselbe mit $2 \sin nx\, dx$ multiplizirt und zwischen denselben Gränzen integrirt,

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots \\ B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\,. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

So kurz diese Bestimmung der unbekannten Coeffizienten ist, so ungenügend ist sie auch, sowohl in formeller als materieller Hinsicht. Einerseits nämlich ruht die ganze Rechnung auf einer durch nichts begründeten Voraussetzung, die wir schon genannt haben, andererseits lässt dieselbe noch Fragen unbeantwortet, ohne deren Erledigung die ganze Auflösung nur eine halbe bleibt; so wissen wir z. B. noch nichts über die Anzahl der Reihenglieder, woran sich, wenn dieselbe unendlich gross werden sollte, wieder die Frage nach der Convergenz der gefundenen Reihen knüpft; ferner ist uns unbekannt, was aus der Gleichung (4) wird, wenn man darin $x = 0$ oder $x = \pi$ setzt; es wäre nämlich recht gut möglich, dass die genannte Formel für diese Werthe noch Bestand hätte, was offenbar in der darauf folgenden nicht stattfindet, wenn nicht zufälligerweise $f(0) = f(\pi) = 0$ ist.

Alle diese Fragen lassen sich mit der grössten Vollständigkeit und Sicherheit erledigen, wenn man die Aufgabe selbst umkehrt, und statt von der Reihen**entwickelung** für $f(x)$ auszugehen, eine **Summirung** der formell bereits bestimmten Reihe versucht. Substituiren wir nämlich für die einzelnen Coeffizienten ihre Werthe, nehmen jede der Reihen als eine endliche und abstrahiren ganz von der jedesmaligen linken Seite der Gleichungen (4) und (5), so käme es offenbar blos darauf an, die Summen der Reihen:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx + \cos x \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx + \cos 2x \int_0^\pi f(x)\cos 2x\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \cos nx \int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$$

$$\sin x \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx + \sin 2x \int_0^\pi f(x)\sin 2x\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \sin nx \int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

zu finden. Diese Reihen lassen sich leicht in eine sehr bequeme Form bringen, wenn man, um Verwechselung zu verhüten, statt des x, wonach integrirt wird, einen anderen Buchstaben, etwa t, braucht, dann die Faktoren $\cos x$, $\cos 2x$, etc. $\sin x$, $\sin 2x$, etc., welche für die Integrationen constant sind, unter die Integralzeichen steckt und zuletzt alle Integrale in ein einziges zusammenzieht, was wegen der gleichen Integrationsgränzen sehr leicht ist. Die obigen Reihen nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\int_0^\pi f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \cos x\cos t + \cos 2x\cos 2t + \ldots + \cos nx\cos nt\right]dt \quad (6)$$

$$\int_0^\pi f(t)\left[\sin x\sin t + \sin 2x\sin 2t + \ldots + \sin nx\sin nt\right]dt. \quad (7)$$

Zerlegt man jedes Cosinus- oder Sinusprodukt, so findet man

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} + \cos x\cos t + \cos 2x\cos 2t + \ldots + \cos nx\cos nt\\
&\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t)\right]\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+t) + \cos 2(x+t) + \ldots + \cos n(x+t)\right]
\end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned}
&\sin x\sin t + \sin 2x\sin 2t + \ldots + \sin nx\sin nt\\
&= \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t)\right]\\
&- \tfrac{1}{2}\left[\cos(x+t) + \cos 2(x+t) + \ldots + \cos n(x+t)\right]
\end{aligned}$$

und jede dieser Reihen lässt sich leicht summiren, wenn man die bekannte Formel *)

$$\cos u + \cos 2u + \ldots + \cos mu = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} \qquad (8)$$

in Anwendung bringt. Man findet dann

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} + \cos x\cos t + \cos 2x\cos 2t + \ldots + \cos nx\cos nt \\ &= \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{4\sin\frac{x-t}{2}} + \frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{4\sin\frac{x+t}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin x\sin t + \sin 2x\sin 2t + \ldots + \sin nx\sin nt \\ &= \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{4\sin\frac{x-t}{2}} - \frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{4\sin\frac{x+t}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die Summen der Reihen (6) und (7) erhält man also aus:

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\pi f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt \pm \tfrac{1}{4}\int_0^\pi f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{\sin\frac{x+t}{2}}dt \qquad (11)$$

je nachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt. Man übersieht nun gleich, dass wenn der Werth hiervon in ein bloses $f(x)$ übergehen soll, wie diess sein müsste, wenn die Gleichungen (4) und (5) wirklich richtig wären, n keine endliche Grösse sein kann, weil sonst eine Funktion von x und n, aber nicht von x allein herauskäme. Wir

*) Man überzeugt sich von ihrer Richtigkeit leicht durch beiderseitige Multiplikation mit $2\sin\frac{u}{2}$ und nachherige Zerlegung jedes Produktes links in eine Sinusdifferenz.

werden hier also auf das Problem hingewiesen, den Gränzwerth zu bestimmen, welchem sich ein Integral von der Form

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{x+t}{2}}{\sin\frac{x+t}{2}} f(t)\,dt$$

für unausgesetzt wachsende n oder $2n+1$ nähert. Setzen wir zur Abkürzung $2n+1=k$, $\frac{x+t}{2}=t'$, wo t' die neue Variable ist, so stellt sich unser Integral unter die allgemeine Form

$$\int_a^b \frac{\sin kt'}{\sin t'} f\left[\pm(2t'-x)\right] dt'$$

oder wenn wir $\frac{1}{\sin t'} f\left[\pm(2t'-x)\right]$, in so fern diese Grösse von t' abhängt, mit $\varphi(t')$ bezeichnen, unter die folgende:

$$\int_a^b \sin kt'\ \varphi(t')\,dt'.$$

Es kommt nun, wie man hieraus ersieht, blos darauf an, den Gränzwerth zu finden, gegen welchen ein Integral von der Form

$$\int_a^b f(t)\sin kt\,dt$$

für unendlich wachsende k convergirt, wobei wir k als eine ganz beliebige Grösse und $b>a$ voraussetzen wollen.

§. 2.

Die soeben ausgesprochene Aufgabe lässt sich auf die folgende sehr einfache Weise lösen. Wir führen zunächst eine neue Veränderliche z der Art ein, dass $z=kt$ oder $t=\frac{z}{k}$ ist; es wird dann

$$\int_a^b f(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{k}\int_{ak}^{bk} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz. \qquad (1)$$

Unter den Vielfachen der Ludolph'schen Zahl, also unter den Grössen π, 2π, 3π etc., giebt es nun ganz sicher eines, welches nächst grösser als ak, und eines, welches nächst kleiner als bk ist, oder mit anderen Worten, wenn m und n ein paar ganze Zahlen bedeuten, so kann man dieselben immer so bestimmen, dass ak zwischen $(m-1)\pi$ und $m\pi$, ebenso bk zwischen $n\pi$ und $(n+1)\pi$ fällt; wir dürfen daher

$$ak = m\pi - \alpha, \quad bk = n\pi + \beta \tag{2}$$

setzen, wo α und β Grössen sind, welche immer zwischen 0 und π liegen. Das nach z genommene Integral umfasst jetzt das Intervall $m\pi - \alpha$ bis $n\pi + \beta$ und wenn wir dieses letzere in drei andere von $m\pi - \alpha$ bis $m\pi$, von $m\pi$ bis $n\pi$ und von $n\pi$ bis $n\pi + \beta$ zerlegen, so zerfällt unser Integral in 3 andere, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f(t)\sin kt\,dt &= \frac{1}{k}\int_{m\pi-\alpha}^{n\pi+\beta} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz \\ = \frac{1}{k}\int_{m\pi-\alpha}^{m\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz &+ \frac{1}{k}\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz + \frac{1}{k}\int_{n\pi}^{n\pi+\beta} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

die wir jetzt einzeln betrachten wollen.

Im ersten Integrale setzen wir $z = m\pi - x$, woraus $\sin z = \cos m\pi \sin x$ und $dz = -dx$ folgt. Die Integrationsgränzen für z bestimmen sich jetzt aus den Gleichungen $z = m\pi - m\pi$, $z = m\pi - (m\pi - \alpha)$ sind also $z = 0$ und $z = \alpha$. Das Integral geht hierdurch in

$$-(-1)^m \frac{1}{k}\int_a^0 f\left(\frac{m\pi - x}{k}\right)\sin x\,dx$$

über, oder, wenn wir die Integrationsgränzen vertauschen, also dem Integrale das entgegengesetzte Vorzeichen geben und statt $m\pi$ seinen Werth $ak + \alpha$ setzen,

$$(-1)^m \int_0^\alpha \frac{1}{k} f\left(a + \frac{\alpha - x}{k}\right)\sin x\,dx. \tag{4}$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass sich dieses Integral für unendlich wachsende k der Gränze Null nähert, wenn für unbegränzt abnehmende δ überhaupt

$$Lim\left[\delta f(a+\delta)\right] = 0$$

ist; denn in diesem Falle haben wir auch

$$Lim\left[\frac{a-x}{k} f(a+\frac{a-x}{k})\right] = 0$$

und um so mehr

$$Lim\left[\frac{1}{k} f(a+\frac{a-x}{k})\right] = 0$$

weil k unendlich wächst, a und x aber immer endliche Grössen bleiben, nämlich $a < \pi$ nach dem Früheren und $x < a$ vermöge der Integrationsgränzen in (4). Da nun das genannte Integral mit dem ersten auf der rechten Seite in (4) vorkommenden identisch ist, so haben wir

$$\left.\begin{array}{l} Lim\,\frac{1}{k}\int_{m\pi-a}^{m\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z\, dz = 0 \\ \text{wenn} \qquad Lim\left[\delta f(a+\delta)\right] = 0\,. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Setzen wir ferner in dem dritten Integrale in Nr. (3) $z = n\pi + x$, so geht dasselbe in

$$\frac{(-1)^n}{k}\int_0^\beta f\left(\frac{n\pi+x}{k}\right)\sin x\, dx = (-1)^n\int_0^\beta \frac{1}{k} f\left(b-\frac{\beta-x}{k}\right)\sin x\, dx$$

über und wenn $Lim\left[\delta f(b-\delta)\right]=0$ ist, für unbegränzt abnehmende δ, so hat man auch

$$Lim\left[\frac{\beta-x}{k} f(b-\frac{\beta-x}{k})\right] = 0\,, \quad Lim\left[\frac{1}{k} f(b-\frac{\beta-x}{k})\right] = 0$$

woraus folgt, dass das in Rede stehende Integral gegen die Gränze Null convergirt. Es ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} &Lim\ \frac{1}{k}\int_{n\pi}^{n\pi+\beta} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz = 0 \\ &\text{wenn} \qquad Lim\left[\delta f(b-\delta)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Gehen wir jetzt in Nr. (3) zur Gränze für wachsende k über und setzen voraus, dass die in Nr. (5) und (6) aufgestellten Bedingungen gleichzeitig stattfinden, so ist

$$\left.\begin{aligned} &Lim\int_a^b f(t)\sin kt\,dt = Lim\ \frac{1}{k}\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz \\ &Lim\left[\delta f(a+\delta)\right] = 0, \quad Lim\left[\delta f(b-\delta)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Zerlegen wir das von $m\pi$ bis $n\pi$ sich erstreckende Integral in eine Partie andere, welche der Reihe nach die Intervalle $m\pi$ bis $(m+1)\pi$, $(m+1)\pi$ bis $(m+2)\pi$, ... $(n-1)\pi$ bis $n\pi$ umfassen, so ist:

$$\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz =$$

$$\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz + \int_{(m+1)\pi}^{(m+2)\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz + \int_{(m+2)\pi}^{(m+3)\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{(n-2)\pi}^{(n-1)\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right)\sin z\,dz.$$

Setzt man im ersten Integrale $z = m\pi + x$, im zweiten $z = (m+1)\pi + x$, im dritten $z = (m+2)\pi + x$, ... endlich im letzten $z = (n-1)\pi + x$, so findet man sehr leicht:

$$\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z \, dz =$$

$$(-1)^m \int_0^{\pi} f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) \sin x \, dx + (-1)^{m+1} \int_0^{\pi} f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right) \sin x \, dx$$

$$+ (-1)^{m+2} \int_0^{\pi} f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right) \sin x \, dx + \ldots.$$

$$\ldots. + (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} f\left(\frac{(n-1)\pi+x}{k}\right) \sin x \, dx.$$

Die Gleichheit der Integrationsgränzen lässt hier eine Zusammenfassung aller Integrale in ein einziges Integral zu, nämlich

$$\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z \, dz = \tag{8}$$

$$(-1)^m \int_0^{\pi} \left\{ f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right) + \ldots. \right.$$

$$\left. \ldots. + (-1)^{m+n-1} f\left(\frac{(n-1)\pi+x}{k}\right) \right\} \sin x \, dx.$$

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, dass die Funktion $f(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ beständig abnehme, ohne jedoch negativ zu werden. Sind dann u und v zwei innerhalb des Intervalles a bis b liegende Grössen, so ist für $u < v$ immer $f(u) > f(v)$ und mithin bilden die Grössen

$$f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right), \quad f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right), \quad f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right), \ldots$$

eine abnehmende Reihe. Daher sind sowohl die Differenzen:

$$f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right), \quad f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+3)\pi+x}{k}\right), \ \ldots$$

als auch die folgenden:

$$f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right),$$

$$f\left(\frac{(m+3)\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+4)\pi+x}{k}\right), \ \ldots.$$

positive Grössen. Hieraus folgt erstens, dass die Summe der Reihe

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right) + f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right) - \ldots. \\ \ldots. + (-1)^{m+n-1} f\left(\frac{(n-1)\pi+x}{k}\right) \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

eine positive Grösse ist, und zweitens, dass dieselbe weniger beträgt, als das erste Glied der Reihe. Um das letztere sogleich zu übersehen, braucht man die Reihe nur in der Form

$$f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) - \left\{f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right) + \ldots\ldots\right\}$$

darzustellen, dann sind alle in Parenthese stehenden Differenzen positive Grössen und folglich wird eine positive Grösse von $f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right)$ subtrahirt. Die Summe der Reihe (9) ist demnach zwischen den Gränzen 0 und $f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right)$ enthalten, woraus nach Nr. (8) sich sogleich ergiebt, dass der absolute Werth des Integrales

$$\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z \, dz$$

zwischen den Gränzen

$$0 \quad \text{und} \quad \int_{0}^{\pi} f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) \sin x \, dx$$

enthalten ist. Hieraus folgt dann weiter, dass dem absoluten Werthe nach

$$0 < \frac{1}{k}\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z\, dz < \int_{0}^{\pi} \frac{1}{k} f\left(\frac{m\pi + x}{k}\right) \sin x\, dx$$

oder wegen des Werthes von $m\pi$

$$0 < \frac{1}{k}\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z\, dz < \int_{0}^{\pi} \frac{1}{k} f\left(a + \frac{a+x}{k}\right) \sin x\, dx$$

ist. Da wir nun schon früher vorausgesetzt hatten, dass $Lim[\delta f(a+\delta)] = 0$ sei, wenn δ bis zur Gränze Null abnimmt, so geht unzweifelhaft hervor, dass auch

$$Lim\left[\frac{1}{k} f(a + \frac{a+x}{k})\right] = 0$$

ist, sobald k ins Unendliche hinaus wächst. Nach dem Vorigen ist dann auch

$$Lim \frac{1}{k}\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z\, dz = 0$$

und nach Nr. (7)

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_{a}^{b} f(t) \sin kt\, dt = 0 \\ \text{wenn} \quad &Lim\left[\delta f(a+\delta)\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wobei die zweite daselbst noch vorkommende Bedingung $Lim[\delta f(b-\delta)] = 0$ weggelassen ist, weil sie bei einer von a bis b abnehmenden und positiv bleibenden Funktion von selbst erfüllt wird, sobald die obengenannte Bedingung stattfindet *). Bleibt die Funktion $f(t)$ für $t = a$ noch endlich,

*) Wegen $a < b$ ist nämlich $f(a) > f(b)$, $f(b)$ aber noch positiv. Man kann daher auch eine Grösse δ so klein wählen, dass $f(a+\delta)$ immer noch $> f(b-\delta)$ oder $\delta f(b-\delta) < \delta f(a+\delta)$ ist, woraus sogleich folgt, dass $Lim[\delta f(b-\delta)] = 0$ wird, wenn schon $Lim[\delta f(a+\delta)] = 0$ ist.

so ist natürlich $Lim\,[\delta f(a+\delta)] = 0$, es kann aber auch $f(t)$ für $t=a$ ins Unendliche hinauswachsen, gleichwohl aber die obige Bedingung noch erfüllt sein, für solche Funktionen gilt dann unser Theorem ebenfalls. So erkennt man z. B. hieraus, dass

$$Lim \int_a^b \frac{\sin kt\, dt}{\sqrt{t-a}} = 0$$

obgleich $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-a}}$ für $t=a$ unendlich wird; denn es ist

$$Lim\,[\delta f(a+\delta)] = Lim\left[\frac{\delta}{\sqrt{\delta}}\right] = Lim\left(\sqrt{\delta}\right) = 0\,.$$

Eine ganz ähnliche Betrachtung dient uns für den Fall, dass die Funktion $f(t)$ von $t=a$ bis $t=b$ beständig wächst, wobei wir aber immer wieder voraussetzen, dass alle ihre Werthe innerhalb dieses Intervalles positiv sind. Dann bilden die Glieder

$$f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right),\quad f\left(\frac{(m+1)\pi+x}{k}\right),\quad f\left(\frac{(m+2)\pi+x}{k}\right),\ \ldots.$$

$$\ldots.\ f\left(\frac{(n+2)\pi+x}{k}\right),\quad f\left(\frac{(n-1)\pi+x}{k}\right)$$

eine steigende Reihe, bei umgekehrter Anordnung dagegen eine fallende. Schreiben wir die Gleichung (8) in der Form

$$\int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z\, dz =$$

$$(-1)^n \int_0^{\pi} \left\{ f\left(\frac{(n-1)\pi+x}{k}\right) - f\left(\frac{(n-2)\pi+x}{k}\right) + \ldots. \right.$$

$$\left. \ldots. + (-1)^{n+m-1} f\left(\frac{m\pi+x}{k}\right) \right\} \sin x\, dx$$

indem wir die dort unter dem Integralzeichen stehende Reihe umkehren, so sind jetzt alle früheren Schlüsse wieder anwendbar; der absolute Werth von dem obigen Integrale liegt nämlich zwischen:

$$0 \text{ und } \int_0^{\pi} f\left(\frac{(n-1)\pi + x}{k}\right) \sin x \, dx$$

und wenn man für $n\pi$ seinen Werth setzt, so folgt nach Division mit k, dass

$$0 < \frac{1}{k} \int_{m\pi}^{n\pi} f\left(\frac{z}{k}\right) \sin z \, dz < \int_0^{\pi} \frac{1}{k} f\left(b - \frac{\pi + \beta - x}{k}\right) \sin x \, dx$$

ist, woraus man für $Lim\left[\delta f(b-\delta)\right] = 0$ nach Nr. (7) leicht

$$\left.\begin{aligned} Lim \int_a^b f(t) \sin kt \, dt &= 0 \\ \text{wenn} \qquad Lim\left[\delta f(b-\delta)\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

findet, wobei nun wegen des beständigen Wachsthums der Funktion die Bedingung $Lim\left[\delta f(a+\delta)\right] = 0$ überflüssig geworden ist. Aus diesem Satze ersieht man z. B. leicht, dass

$$Lim \int_a^b \frac{\sin kt \, dt}{\sqrt{b-t}} = 0$$

ist, weil die Funktion $f(t) = \frac{1}{\sqrt{b-t}}$ die genannten Bedingungen erfüllt.

Es hat nun nicht die mindeste Schwierigkeit mehr, den Fall zu betrachten, in welchem der Lauf der Funktion $f(t)$ von $t=a$ bis $t=b$ ein völlig willkührlicher ist. Nähme dieselbe während dieses Intervalles mehrmals zu und ab, ohne jedoch negativ zu werden, so denke man sich ihre Maxima und Minima aufgesucht, welche etwa für $t=\alpha$, $t=\beta$, $t=\gamma$, etc. eintreten mögen und zerlege das fragliche Integral wie folgt

$$\int_a^b f(t) \sin kt \, dt$$

$$= \int_a^{\alpha} f(t) \sin kt \, dt + \int_a^{\beta} f(t) \sin kt \, dt + \int_{\beta}^{\gamma} f(t) \sin kt \, dt + \ldots .$$

$$\ldots . + \int_{\lambda}^{b} f(t) \sin kt \, dt .$$

Da nun eine Funktion zwischen einem Maximum und dem nächsten Minimum entweder blos ab- oder blos zunimmt, so sind auf jedes der einzelnen Integrale die Schlüsse anwendbar, welche uns zeigten, dass

$$Lim \int_a^b f(t) \sin kt \, dt = 0 \qquad (12)$$

sei, wenn $f(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ entweder nur ab- oder nur zunimmt; es nähert sich also jedes einzelne der Integrale rechts der Gränze Null und folglich ist wieder der Gränzwerth des Integrales links $= 0$. Ginge die Funktion $f(t)$ an einer der Gränzen $t = a$ oder $t = b$ ins Unendliche hinaus, so muss wieder $Lim [\delta f(a + \delta)]$ oder $Lim [\delta f(b - \delta)] = 0$ sein.

Auch für solche Funktionen $f(t)$, welche stellenweis negativ werden, gilt die Gleichung (12) noch. Wäre z. B. $f(t)$ positiv von $t = a$ bis $t = \mu$, negativ von $t = \mu$ bis $t = \nu$ und dann wieder positiv von $t = \nu$ bis $t = b$, so zerlege man wie folgt

$$\int_a^b f(t) \sin kt \, dt$$

$$= \int_a^\mu f(t) \sin kt \, dt + \int_\mu^\nu f(t) \sin kt \, dt + \int_\nu^b f(t) \sin kt \, dt .$$

Das erste und dritte Integral rechts nähern sich der Gränze Null, weil in ihnen $f(t)$ stets positiv bleibt; schreibt man das zweite in der Form

$$- \int_\mu^\nu [-f(t)] \sin kt \, dt$$

so bleibt hier $[-f(t)]$ positiv, weil der Voraussetzung nach $f(t)$ von $t = \mu$ bis $t = \nu$ negativ ist, und folglich convergirt das Integral

$$\int_\mu^\nu [-f(t)] \sin kt \, dt$$

gegen die Gränze Null, wodurch man wieder auf die Gleichung (12) zurückkommt. — Nach allen diesen Bemerkungen können wir den

Satz aussprechen: „bleibt $f(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ stetig und endlich, so ist

$$Lim \int_a^b f(t) \sin kt \, dt = 0 \qquad (13)$$

sollte aber an einer der Gränzen a oder b die Funktion ins Unendliche hinausgehen, so ist zur Gültigkeit jener Formel noch die Bedingung

$$Lim [\delta f(a + \delta)] = 0 \quad \text{respektive} \quad Lim [\delta f(b - \delta)] = 0$$

erforderlich."

Dieses Resultat lässt sich mit der grössten Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, dass die Funktion $f(t)$ während des Intervalles $t = a$ bis $t = b$ mehrmals unstetig oder unendlich wird. Man braucht sich nur zu erinnern, was man unter dem bestimmten Integrale einer unstetigen Funktion $F(t)$ versteht, um diess sogleich einzusehen. Erleidet nämlich die Funktion $F(t)$ an der Stelle $t = \mu$ eine Unterbrechung der Continuität, so hat $F(\mu)$ plötzlich zwei Werthe, wenn sonst $F(t)$ immer nur einen einzigen besass; der eine von ihnen, den man mit $Lim\, F(\mu - \delta) = F(\mu - 0)$ bezeichnen kann, ist der Endwerth der bisherigen Reihe von Werthen, welche $F(t)$ gehabt hat, der andere: $Lim\, F(\mu + \delta) = F(\mu + 0)$ bildet den Anfang einer neuen Reihe von Werthen, wie man am leichtesten sich veranschaulichen kann, wenn man $u = F(t)$ geometrisch als Curve construirt. Wird nun $F(t)$ zwischen a und b mehrmals unstetig, etwa für $t = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ so besteht die Funktion $F(t)$ aus einer Partie einzelner Funktionen, welche für sich stetig sind, denn man kann sich denken, dass $F(t)$ von a bis $\alpha - 0$ mit der Funktion $\Phi(t)$ zusammenfällt, von $\alpha + 0$ bis $\beta - 0$ mit der Funktion $\Psi(t)$, von $\beta + 0$ bis $\gamma - 0$ mit $X(t)$ u. s. w. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b F(t) \, dt$$

d. h. die Fläche der durch die Gleichung $u = F(t)$ charakterisirten Curve, ist in diesem Falle nichts Anderes als die Summe von folgenden Integralen:

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

$$\int_a^{\alpha-0} F(t)\,dt + \int_{\alpha+0}^{\beta-0} F(t)\,dt + \int_{\beta+0}^{\gamma-0} F(t)\,dt + \ldots$$

oder auch

$$\int_a^{\alpha-0} \Phi(t)\,dt + \int_{\alpha+0}^{\beta-0} \Psi(t)\,dt + \int_{\beta+0}^{\gamma-0} X(t)\,dt + \ldots$$

Wäre also in unserem Falle die Funktion $f(t)$ unstetig an den Stellen $t = \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ etc., sämmtlich zwischen a und b enthalten, so würde man von $t = a$ bis $t = \alpha - 0$ durch eine stetige Funktion $\varphi(t)$, von $t = \alpha + 0$ bis $t = \beta - 0$ etwa durch $\psi(t)$ etc. ausdrücken und demnach:

$$\int_a^b f(t) \sin kt\,dt$$

$$= \int_a^{\alpha-0} f(t) \sin kt\,dt + \int_{\alpha+0}^{\beta-0} f(t) \sin kt\,dt + \ldots.$$

$$= \int_a^{\alpha-0} \varphi(t) \sin kt\,dt + \int_{\alpha+0}^{\beta-0} \psi(t) \sin kt\,dt + \ldots.$$

setzen können. Jedes der einzelnen Integrale nähert sich wegen der Continuität der darin vorkommenden Funktion für wachsende k der Gränze Null und folglich ist wieder

$$Lim \int_a^b f(t) \sin kt\,dt = 0.$$

Auch der Fall, dass $f(t)$ an einer der Stellen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ oder an mehreren unendlich würde, lässt sich leicht behandeln. Wäre τ eine solche Stelle, so zerlege man wie folgt

$$\int_a^b f(t) \sin kt\,dt = \int_a^{\tau} f(t) \sin kt\,dt + \int_{\tau}^b f(t) \sin kt\,dt$$

und jetzt passt auf jedes der Integrale rechts die Bemerkung, welche wir früher für den Fall machten, dass die Funktion $f(t)$ an einer der

Integrationsgränzen ins Unendliche hinausginge; zum Verschwinden der Integrale sind nämlich die Bedingungen

$$Lim\left[\delta f(\tau-\delta)\right]=0 \quad \text{und} \quad Lim\left[\delta f(\tau+\delta)\right]=0$$

erforderlich. Ebenso würde man verfahren, wenn $f(t)$ zwischen a und b mehrmals unendlich würde.

So lässt sich nun das Gesammtresultat dieser ganzen Untersuchung in folgendem Satze zusammenfassen:

„Bleibt die Funktion $f(t)$ von $t=a$ bis $t=b$ endlich, gleichviel ob sie Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet oder nicht, so ist für unendlich wachsende k

$$Lim\int_a^b f(t)\sin kt\,dt = 0 \tag{14}$$

wird sie aber innerhalb jenes Intervalles an einer oder mehreren Stellen, die durch $t=\tau$ bezeichnet werden mögen, unendlich, so gilt diese Gleichung nur dann, wenn noch die Bedingung

$$Lim\left[\delta f(\tau\pm\delta)\right]=0 \tag{15}$$

für unendlich abnehmende δ erfüllt ist."

§. 3.

Durch seine Einfachheit und Allgemeinheit wird uns das soeben entwickelte Theorem zu einer reichen Quelle neuer Sätze von eigenthümlichen Gepräge. So ist es z. B. sehr leicht, aus demselben den Gränzwerth abzuleiten, gegen welchen das Integral

$$\int_0^c \frac{\sin kt}{t} F(t)\,dt$$

worin c eine positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet, bei unausgesetzt wachsenden k convergirt. In der That beruht die Auflösung dieses Problems auf weiter nichts, als auf der einfachen Substitution

$$f(t)=\frac{F(t)-F(0)}{t}.$$

Setzen wir darin $F(t)$ als eine von $t=0$ bis $t=c$ endliche Funktion voraus, die aber beliebig viele Unterbrechungen der Stetigkeit erleiden darf, so bleibt auch $f(t)$ eine endliche Grösse, nur stellt sie sich für $t=0$ unter die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$, deren wahrer Werth möglicherweise auch unendlichgross sein könnte. Für diesen Fall haben wir aber, wenn im Theoreme des vorigen Paragraphen $\tau=0$ genommen wird,

$$Lim\left[\delta f(\delta)\right] = Lim\left[F(\delta) - F(0)\right]$$

d. i. Null, weil wir $F(0)$ als endliche Grösse voraussetzen. Es ist demnach

$$Lim \int_0^c \frac{F(t) - F(0)}{t} \sin kt\, dt = 0$$

oder wenn man die einzelnen Theile integrirt

$$Lim \int_0^c \frac{\sin kt}{t} F(t)\, dt = Lim\, F(0) \int_0^c \frac{\sin kt}{t} dt\,.$$

Führen wir eine neue Variable $z=kt$ auf der rechten Seite ein, so wird

$$\int_0^c \frac{\sin kt}{t} dt = \int_0^{ck} \frac{\sin z}{z} dz$$

und nach dem Vorigen

$$Lim \int_0^c \frac{\sin kt}{t} F(t)\, dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz.$$

Man weiss, dass der Werth des Integrales rechts $=\frac{\pi}{2}$ ist, indessen hat man nicht nöthig, diese Kenntniss vorauszusetzen, denn wählt man die Funktion $F(t)$ so, dass sich die auf der linken Seite verlangte Integration ausführen lässt, so gelangt man von selbst zu dem Werthe des Integrales rechts. So ist z. B. für $F(t)=e^{-t}$, $c=\infty$

$$Lim \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} e^{-t} dt = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$$

und wenn man berücksichtigt, dass *Arctan k* der Werth des Integrales links *) ist, so findet man als Gränzwerth dafür $\frac{\pi}{2}$ und folglich

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz \,.$$

Nach dem Vorigen ergiebt sich nun das Theorem:

$$Lim \int_0^c \frac{\sin kt}{t} F(t)\, dt = \frac{\pi}{2} F(0). \qquad (1)$$

Diess lässt sich leicht in einer anderen sehr bemerkenswerthen Form darstellen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\sin kt}{t} = \int_0^k \cos tu\, du$$

ist, wobei t als Constante für die Integration figurirt. Durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich das vorige Integral in

$$\int_0^c F(t)\, dt \int_0^k \cos tu\, du$$

und durch Umkehrung der Integrationsordnung in

$$\int_0^k du \int_0^c F(t) \cos ut\, dt \,.$$

---

*) Man findet diess leicht auf folgende Weise. Sei

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} e^{-t} dt$$

so folgt

$$\frac{du}{dk} = \int_0^\infty \cos kt\, e^{-t} dt$$

und wenn man diese Integration ausführt $\frac{du}{dk} = \frac{1}{1+k^2}$, folglich $u = Arctan\ k$, wo nun keine Constante hinzuzufügen ist, weil aus dem ursprünglichen Werthe von u hervorgeht, dass für $k = 0$ auch $u = 0$ wird.

Geht man hier zur Gränze für unendlich wachsende k über, so wird nach Nr. (1)

$$\int_0^\infty du \int_0^c F(t) \cos ut \, dt = \frac{\pi}{2} F(0) \qquad (2)$$

und wenn man $F(t) = q(x+t)$ setzt, wo x in Bezug auf die Integrationen nach t und u constant bleibt

$$q(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty du \int_0^c q(x+t) \cos ut \, dt \qquad (3)$$

und mittelst dieses Theoremes kann man jede Funktion, welche von x bis $x+c$ endlich bleibt, in ein bestimmtes Integral verwandeln. Wir wollen uns jedoch bei Formeln dieser Art vor der Hand nicht aufhalten, da wir später auf diese ganze Klasse von Beziehungen ausführlicher zu reden kommen.

Nimmt man in der Formel (1)

$$F(t) = \frac{t}{\sin t} f(t)$$

wobei $f(t)$ von $t=0$ bis $t=c$ endlich bleiben soll, aber beliebig viele Unterbrechungen der Stetigkeit erleiden darf, so bleibt auch $F(t)$ endlich, sobald $c < \pi$ und daher ist das genannte Theorem in diesem Falle anwendbar; zugleich hat man $F(0) = Lim \frac{\delta}{\sin \delta} f(\delta) = f(0)$ mithin

$$Lim \int_0^c \frac{\sin kt}{\sin t} f(t) \, dt = \frac{\pi}{2} f(0), \quad \pi > c > 0. \qquad (4)^*)$$

Wäre dagegen $c = \pi$, so würde man die Formel (1) nicht unmittelbar anwenden können, weil dann $F(t)$ innerhalb des Intervalles

---

*) Die obige Formel, sowie die in Nr. (8) und (9) vorkommenden, hat zuerst Lejeune Dirichlet entwickelt in Crelle's *Journ. Bd.* 4, *S.* 94, und theilweis einfacher in Dove's *Repertorium Bd.* 1, *S.* 152. Die sehr elegante Ableitung jenes scharfsinnigen Geometers besteht darin, dass die Zerlegung, welche in §. 2 für das Integral unter Nr. (1) daselbst gezeigt worden ist, unmittelbar auf das obige Integral angewendet wird.

$t = 0$ bis $t = \pi$, nämlich am Ende desselben, unendlich würde. Man hat nun aber

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

und wenn wir im zweiten Integrale rechts $t = \pi - t'$ setzen, und zugleich das bisher ganz beliebige k zu einer ungeraden Zahl machen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\pi - t')\,dt'.$$

Hier ist das Theorem (4) auf jedes der Integrale rechts anwendbar und giebt dann

$$Lim \int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + f(\pi)\right]. \qquad (5)$$

Aus den Theoremen (4) und (5) lässt sich nun leicht der Gränzwerth des Integrales

$$\int_0^{c} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt \qquad (6)$$

für den Fall ableiten, dass c eine ganz beliebige positive Grösse bedeutet. Wir haben dazu die Unterscheidung zweier Fälle nöthig; entweder nämlich ist c gerade ein Vielfaches von π, also etwa $= s\pi$, wo s eine positive ganze Zahl bezeichnet, oder c steht unter der Form $s\pi + \gamma$, wo γ zwischen 0 und π liegt.

Im ersten Falle $c = s\pi$ zerlege man das Integral (6) in die s folgenden

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{(s-1)\pi}^{s\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

und substituire unter Voraussetzung eines ungeraden k in das zweite Integral $t = \pi + t'$, in das dritte $t = 2\pi + t'$ etc. in das letzte $t = (s-1)\pi + t'$; es wird dann

$$\int_0^{s\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\pi+t')\,dt' + \int_0^{\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(2\pi+t')\,dt' + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^{\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f[(s-1)\pi + t']\,dt' \qquad (7)$$

und auf jedes dieser Integrale lässt sich das Theorem in (5) anwenden, wenn man sich der Reihe nach

$$f(t) = f(t),\quad f(\pi + t'),\quad f(2\pi + t'),\ \ldots\ f[(s-1)\pi + t']$$

gesetzt denkt; man erhält daher für die rechte Seite in (7) den Gränzwerth:

$$\frac{\pi}{2}\big[f(0) + f(\pi)\big] + \frac{\pi}{2}\big[f(\pi) + f(2\pi)\big] + \frac{\pi}{2}\big[f(2\pi) + f(3\pi)\big] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\pi}{2}\big[f[(s-1)\pi] + f(s\pi)\big]$$

also durch Vereinigung der gleichen Grössen:

$$Lim \int_0^{s\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

$$= \pi\big[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \ldots + f[(s-1)\pi] + \tfrac{1}{2}f(s\pi)\big]. \qquad (8)$$

Handelt es sich dagegen um den Gränzwerth des Integrales

$$\int_0^{s\pi+\gamma} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

so zerlege man es in die beiden folgenden

$$\int_0^{s\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_{s\pi}^{s\pi+\gamma} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt$$

und setze im zweiten $t = s\pi + t'$, so findet sich leicht

$$\int_0^{s\pi+\gamma} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \int_0^{s\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_0^{\gamma} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(s\pi + t')\,dt'.$$

Den Gränzwerth des ersten erhält man nun nach Formel (8), den des zweiten nach Formel (4), wenn man sich daselbst $c = \gamma$, $f(t) = f(s\pi + t')$ gesetzt denkt. Es ergiebt sich so

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_0^{s\pi+\gamma} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots + f(s\pi)\right] \\ &\qquad \pi > \gamma > 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Lässt man in den Formeln (8) und (9) die ganze positive Zahl s ins Unendliche hinaus wachsen, so werden die auf der jedesmaligen rechten Seite stehenden Reihen unendlich, und dann entscheidet ihre Convergenz oder Divergenz, ob der Gränzwerth des Integrales links eine bestimmte angebbare und endliche Grösse ist oder nicht. Man hat dann in Zeichen

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_0^{\infty} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots \text{ in inf.}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Um hierzu ein wenigstens nicht ganz gewöhnliches Beispiel zu geben, wollen wir eine Relation zwischen zwei Reihen entwickeln, die man sonst aus der Theorie der elliptischen Funktionen abzuleiten pflegt.

Setzen wir nämlich in der aus der Gammafunktionentheorie bekannten Formel [§. 12, Nr. (5)]:

$$\int_0^\infty \cos 2bt\, e^{-(at)^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\, e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

für b der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots n$ und addiren alle so entstehenden Gleichungen, wobei wir aber die erste blos halb nehmen, so wird

$$\int_0^\infty \left\{\tfrac{1}{2} + \cos 2t + \cos 4t + \ldots + \cos 2nt\right\} e^{-(at)^2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2} + \ldots + e^{-\left(\frac{n}{a}\right)^2}\right\}$$

d. i. wenn man die unter dem Integralzeichen stehende Reihe summirt

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, e^{-(at)^2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2} + \ldots + e^{-\left(\frac{n}{a}\right)^2}\right\}.$$

Lassen wir nun $2n+1 = k$ ins Unendliche wachsen, so wird die $(n+1)$ gliedrige Reihe rechts zu einer unendlichen, und nach Formel (10) ergiebt sich jetzt, wenn

$$f(t) = e^{-(at)^2}$$

gesetzt wird, sehr leicht die Relation

$$\pi\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-(a\pi)^2} + e^{-(2a\pi)^2} + e^{-(3a\pi)^2} + \ldots.\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{\tfrac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{3}{a}\right)^2} + \ldots.\right\}$$

die sich in eine weit elegantere Form bringen lässt, wenn man

$$e^{-(a\pi)^2} = p\,, \quad e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = q$$

setzt, woraus

$$-a^2\pi^2 = lp\,, \quad -\frac{1}{a^2} = lq$$

oder

$$lp\,lq = \pi^2$$

folgt. Ausserdem hat man noch

$$\pi = \sqrt{lp\,lq} = \sqrt{l\left(\frac{1}{p}\right)\,l\left(\frac{1}{q}\right)}$$

$$\sqrt{\pi} = \sqrt[4]{l\left(\frac{1}{p}\right)}\,\sqrt[4]{l\left(\frac{1}{q}\right)}\,, \quad \frac{1}{a} = \sqrt{l\left(\frac{1}{q}\right)} = \sqrt[4]{l\left(\frac{1}{q}\right)}\,\sqrt[4]{l\left(\frac{1}{q}\right)}$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so gelangt man zu folgendem Satze:

findet zwischen den beiden ächten Brüchen p und q die Relation

$$l\left(\frac{1}{p}\right)\,l\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2$$

statt, so gilt die Gleichung:

$$\sqrt[4]{l\left(\frac{1}{p}\right)}\left[\tfrac{1}{2} + p + p^4 + p^9 + p^{16} + \ldots\right]$$

$$= \sqrt[4]{l\left(\frac{1}{q}\right)}\left[\tfrac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \ldots\right]$$

welche ursprünglich von Cauchy gefunden worden ist *).

*) M. s. unter dem Vielen, was hierher gehört, Abel's Note in Crelle's *Journal*, *Band* 4, *S.* 93.

§. 4.

Ein Blick auf die bisherigen Schritte der Betrachtung lässt erkennen, dass ein ganz ähnlicher Gedankengang zu den Gränzwerthen der Integrale

$$\int_a^b f(t)\cos kt\,dt\,,\quad \int_0^c \frac{\cos kt}{t}F(t)\,dt\,,\quad \int_0^c \frac{\cos kt}{\cos t}f(t)\,dt$$

führen muss und es würde in der That nichts leichter als diese Durchführung sein. Kürzer jedoch gelangt man durch Reduktion der vorstehenden Integrale auf die bereits bekannten zum Ziele.

Aus dem am Ende von §. 2 ausgesprochenen Theoreme folgt nämlich für $f(t)=\varphi(\lambda+t)$, wo λ eine willkührliche Constante bezeichnet

$$Lim\int_a^b \varphi(\lambda+t)\sin kt\,dt = 0 \qquad (1)$$

wobei noch vorausgesetzt wird, dass $Lim\left[\delta f(t\pm\delta)\right]=0$ oder

$$Lim\left[\delta\varphi(\lambda+t\pm\delta)\right]=0 \qquad (2)$$

sei. Setzen wir nun $\lambda+t=t'$, so folgt sehr leicht

$$\int_a^b \varphi(\lambda+t)\sin kt\,dt = \int_{a+\lambda}^{b+\lambda}\varphi(t')\sin k(t'-\lambda)\,dt'$$

$$= \cos\lambda k\int_{a+\lambda}^{b+\lambda}\varphi(t')\sin kt'\,dt' - \sin\lambda k\int_{a+\lambda}^{b+\lambda}\varphi(t')\cos kt'\,dt'\,.$$

Wenden wir aber auf das erste Integral rechts das oben citirte Theorem selbst an und berücksichtigen die Gleichung (1), so folgt

$$0 = Lim\left[-\sin\lambda k\int_{a+\lambda}^{b+\lambda}\varphi(t')\cos kt'\,dt'\right]$$

und da der Faktor $\sin\lambda k$ für wachsende k sich nicht der Null nähert, so muss:

$$Lim \int_{a+\lambda}^{b+\lambda} \varphi(t') \cos kt'\, dt' = 0$$

sein unter der in Nr. (2) angegebenen Bedingung. Lassen wir am Ende das bisher beliebige λ bis zur Gränze Null abnehmen, und schreiben f, t für φ, t', so ist

$$\left.\begin{aligned} Lim \int_a^b f(t) \cos kt\, dt &= 0 \\ \text{wenn} \qquad Lim \left[\delta f(t \pm \delta)\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ganz analog dem früheren Theoreme in §. 2.

Hieraus kann man ebenso wie in §. 3 den Gränzwerth von

$$\int_0^c \frac{\cos kt}{t} F(t)\, dt$$

ableiten, indem man für $f(t)$ und nachher für t ganz die nämlichen Substitutionen vornimmt wie dort; man gelangt auf diese Weise zu der Relation

$$Lim \int_0^c \frac{\cos kt}{t} F(t)\, dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\cos z}{z} dz$$

die zwar formell ganz richtig, materiell aber unbrauchbar ist, weil das Integral auf der rechten Seite unendlich wird.

Setzt man in Formel (3)

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{\cos t}$$

so bleibt $f(t)$ endlich, wenn $\varphi(t)$ es ist, so lange als t weniger als $\frac{\pi}{2}$ beträgt; nehmen wir daher $a = 0$, $b < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$Lim \int_0^b \frac{\cos kt}{\cos t} \varphi(t)\, dt = 0, \quad b < \frac{\pi}{2}$$

oder wenn wir der Symmetrie wegen c und f für b und φ schreiben

$$Lim \int_0^c \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\, dt = 0, \quad \frac{\pi}{2} > c > 0. \qquad (4)$$

Für $c = \frac{\pi}{2}$ dagegen wird die Sache anders; setzt man hier $t = \frac{\pi}{2} - t'$ und nimmt für k eine ungerade Zahl von der Form $4n+1$, so findet man leicht

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f\left(\frac{\pi}{2} - t'\right) dt'$$

und mithin durch Uebergang zur Gränze für unendlich wachsende k

$$Lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right). \qquad (5)$$

Handelt es sich ganz im Allgemeinen um den Gränzwerth von

$$\int_0^c \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt$$

wo c eine ganze beliebige Grösse und k von der Form $4n+1$ ist, so hat man blos die beiden Fälle zu unterscheiden, ob für ein ganzes positives s,

$$c = (s+\tfrac{1}{2})\pi \quad \text{oder} \quad c = (s+\tfrac{1}{2})\pi + \gamma$$

ist, wo dann γ zwischen 0 und π liegt. Im ersten Falle zerlege man wie folgt:

$$\int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{(s+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt$$

und substituire im zweiten Integrale auf der rechten Seite $t = \frac{\pi}{2} + t'$, so wird

$$\int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt + \int_0^{s\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\tfrac{\pi}{2} + t')\,dt'.$$

Durch Anwendung der Formeln (5) in diesem und (8) im vorigen Paragraphen wird jetzt

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt \\ &= \pi\left[f(\tfrac{1}{2}\pi) + f(\tfrac{3}{2}\pi) + f(\tfrac{5}{2}\pi) + \ldots + \tfrac{1}{2} f\left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)\right]. \end{aligned}\right\} (6)$$

Im Falle $c = (s+\frac{1}{2})\pi + \gamma$ dagegen zerlege man wie folgt

$$\int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi+\gamma} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt = \int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt + \int_{(s+\frac{1}{2})\pi}^{(s+\frac{1}{2})\pi+\gamma} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt.$$

Der Gränzwerth des ersten Integrales rechts findet sich nach Formel (6) selbst; um den des zweiten zu bekommen setze man

$$t = (s+\tfrac{1}{2})\pi + t'$$

es geht dann das fragliche Integral in

$$\int_0^{\gamma} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f\left(\frac{2s+1}{2}\pi + t'\right) dt'$$

über, dessen Gränzwerth nach Formel (4) in §. 3 gleich $\frac{\pi}{2} f\left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)$ ist. Daher ergiebt sich nach dem Vorigen

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_0^{(s+\frac{1}{2})\pi+\gamma} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt \\ &= \pi\left[f(\tfrac{1}{2}\pi) + f(\tfrac{3}{2}\pi) + f(\tfrac{5}{2}\pi) + \ldots + f\left(\frac{2s+1}{2}\pi\right)\right] \\ &\pi > \gamma > 0. \end{aligned}\right\} (7)$$

Lässt man noch s ins Unendliche wachsen, so vereinigen sich die Formeln (6) und (7) zur folgenden:

$$\left.\begin{aligned} &Lim \int_0^{\infty} \frac{\cos kt}{\cos t} f(t)\,dt \\ &= \pi\left[f(\tfrac{1}{2}\pi) + f(\tfrac{3}{2}\pi) + f(\tfrac{5}{2}\pi) + \ldots \text{ in inf.}\right]. \end{aligned}\right\} (8)$$

Diese Formel lässt sich auf ähnliche Weise benutzen, wie die entsprechende in §. 3. So findet man z. B. mit ihrer Hülfe leicht:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left\{\tfrac{1}{2} - e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2} - \ldots + e^{-\left(\frac{2n}{a}\right)^2}\right\}$$

$$= \int_0^\infty \left\{\tfrac{1}{2} - \cos 2t + \cos 4t - \ldots + \cos 4nt\right\} e^{-(at)^2}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(4n+1)t}{\cos t}\, e^{-(at)^2}\, dt.$$

Lässt man hier n, also auch $4n+1 = k$ ins Unendliche wachsen, so ergiebt sich nach Formel (8) sogleich

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left\{\tfrac{1}{2} - e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{2}{a}\right)^2} - e^{-\left(\frac{3}{a}\right)^2} + \ldots.\right\}$$

$$= \pi\left\{e^{-\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2} + e^{-\left(\frac{3a\pi}{2}\right)^2} + e^{-\left(\frac{5a\pi}{2}\right)^2} + \ldots.\right\}$$

und wenn man noch

$$e^{-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = p, \quad e^{-\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2} = q$$

setzt, so gelangt man zu dem Satze:

> findet zwischen den beiden ächten Brüchen p und q die Relation
>
> $$l\left(\frac{1}{p}\right)\, l\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$
>
> statt, so gilt die Gleichung:
>
> $$\sqrt[4]{l\left(\frac{1}{p}\right)}\,\left[\tfrac{1}{2} - p + p^4 - p^9 + p^{16} - \ldots.\right]$$
>
> $$= \sqrt{2}\,\sqrt[4]{l\left(\frac{1}{q}\right)}\,\left[q + q^4 + q^9 + q^{16} + \ldots.\right]$$

§. 5.

Durch die Betrachtungen der beiden vorigen Paragraphen sind wir nun in den Stand gesetzt, die Summe derjenigen unendlichen Reihe zu bestimmen, von welcher das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi f(t)\cos m(t \mp a)\,dt$$

das allgemeine Glied ausmacht. Setzen wir nämlich vor der Hand $m = 0, 1, 2, \ldots n$ und addiren alle so entstehenden Glieder, wobei wir dem ersten derselben noch den Coeffizienten $\frac{1}{2}$ geben, so entsteht zunächst die folgende endliche Reihe:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^\pi f(t)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos(t \mp a)\,dt + \int_0^\pi f(t)\cos 2(t \mp a)\,dt + \ldots \\ \ldots + \int_0^\pi f(t)\cos n(t \mp a)\,dt\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die sich kürzer in die folgende zusammenfassen lässt

$$\int_0^\pi f(t)\left[\tfrac{1}{2} + \cos(t \mp a) + \cos 2(t \mp a) + \ldots + \cos n(t \mp a)\right] dt$$

worin man die unter dem Integralzeichen stehende Reihe nach der schon einmal benutzten Summirungsformel zusammenziehen kann; man erhält so

$$\int_0^\pi f(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{t \mp a}{2}}{2\sin\frac{t \mp a}{2}}\,dt\,. \quad (2)$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung $2n+1$ mit k und lassen n, also auch k unendlich wachsen, so ist jetzt mit Unterscheidung der beiden Zeichen nach (2) und (1):

$$Lim \int_0^{\pi} \frac{sin\, \frac{1}{2}k\,(t-\alpha)}{2sin\, \frac{1}{2}(t-\alpha)} f(t)\, dt \qquad (3)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\, dt + \int_0^{\pi} f(t) cos\,(t-\alpha)\, dt + \int_0^{\pi} f(t) cos\, 2(t-\alpha)\, dt + .. in\, inf.$$

und

$$Lim \int_0^{\pi} \frac{sin\, \frac{1}{2}k\,(t+\alpha)}{2sin\, \frac{1}{2}(t+\alpha)} f(t)\, dt \qquad (4)$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\, dt + \int_0^{\pi} f(t) cos\,(t+\alpha)\, dt + \int_0^{\pi} f(t) cos\, 2(t+\alpha)\, dt + .. in\, inf.$$

und hier handelt es sich blos noch um die Aufsuchung der Gränzwerthe links, welche auf folgende Weise sehr leicht zu bewerkstelligen ist.

In dem Integrale (3) setzen wir $\frac{1}{2}(t-\alpha) = u$, woraus $t = \alpha + 2u$, $dt = 2\,du$ folgt; die Gränzwerthe für u sind dann $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ und $\frac{1}{2}(0-\alpha)$, wodurch das Integral in das folgende übergeht

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{sin\, ku}{sin\, u} f(\alpha + 2u)\, du$$

welches sich in die beiden folgenden zerlegen lässt:

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{0} \frac{sin\, ku}{sin\, u} f(\alpha + 2u)\, du + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{sin\, ku}{sin\, u} f(\alpha + 2u)\, du\,. \qquad (5)$$

Setzen wir im ersten $u = -t$, im zweiten $u = t$, so ändert sich das letztere weiter nicht, das erste dagegen geht in

$$-\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{0} \frac{sin\, kt}{sin\, t} f(\alpha - 2t)\, dt$$

über, worin wir durch Vertauschung der Gränzen wieder das positive

Vorzeichen hervorrufen. Die Summe in (5), d. h. das Integral (4), stellt sich nun in die folgende Form:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{\sin kt}{\sin t} f(\alpha - 2t)\, dt \; + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(\alpha + 2t)\, dt . \qquad (6)$$

Für die Aufsuchung der Gränzen, welchen sich diese beiden Integrale bei unendlich wachsenden k nähern, macht sich die Unterscheidung dreier Fälle hinsichtlich des α nöthig, ob nämlich $\alpha = 0$, oder zwischen 0 und π enthalten, oder endlich $= \pi$ ist. Im ersten Falle annullirt sich das erste Integral wegen der gleichen Integrationsgränzen, die es erhält, und das zweite convergirt nach Formel (4) in §. 3 für $c = \frac{\pi}{2}$ gegen den Werth $\frac{\pi}{2} f(+0)$; liegt zweitens α zwischen 0 und π so hat man gleichzeitig

$$\pi > \tfrac{1}{2}\alpha > 0 \quad \text{und} \quad \pi > \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha) > 0$$

und folglich sind nach dem soeben genannten Theoreme $\frac{\pi}{2} f(\alpha - 0)$ und $\frac{\pi}{2} f(\alpha + 0)$ die Gränzwerthe unserer Integrale.

Für $\alpha = \pi$ endlich verschwindet das zweite Integral in (6) und das erste nähert sich der Gränze $\frac{\pi}{2} f(\pi - 0)$. Die Summe der unendlichen Reihe in Nr. (3) wird also

$$\frac{\pi}{2} f(+0), \quad \pi \frac{f(\alpha - 0) + f(\alpha + 0)}{2}, \quad \frac{\pi}{2} f(\pi - 0)$$

je nachdem

$$\alpha = 0, \quad \pi > \alpha > 0, \quad \alpha = \pi$$

ist, mithin verschieden nach den drei für α betrachteten Fällen.

Nicht minder leicht ist die Diskussion des Integrales in Nr. (4). Für $\frac{1}{2}(t + \alpha) = u$ geht dasselbe in das folgende über:

$$\int_{\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}(\pi+\alpha)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(-\alpha+2u)\,du$$

welches wir wieder, t für u schreibend, in die zwei nachstehenden zerfällen:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+\alpha)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(-\alpha+2t)\,dt \;-\; \int_{0}^{\frac{1}{2}\alpha} \frac{\sin kt}{\sin t} f(-\alpha+2t)\,dt\,. \qquad (7)$$

Hinsichtlich des α unterscheiden wir wieder die drei vorhin betrachteten Fälle. Für $\alpha = 0$ annullirt sich das zweite Integral und das erste convergirt gegen $\frac{\pi}{2} f(+0)$; liegt zweitens α zwischen 0 und π, so finden gleichzeitig die Ungleichungen

$$\pi > \tfrac{1}{2}(\pi+\alpha) > 0 \quad \text{und} \quad \pi > \tfrac{1}{2}\alpha > 0$$

statt, woraus folgt, dass $\frac{\pi}{2} f(-\alpha+0) - \frac{\pi}{2} f(-\alpha+0)$, d. h. Null der Gränzwerth des ganzen in (7) stehenden Ausdruckes ist, für $\alpha = \pi$ endlich wird $\frac{1}{2}(\pi+\alpha) = \pi$ und dann müssen wir auf das erste Integral in (7) die Formel (5) in §. 3 und auf das zweite die Formel (4) ebendaselbst anwenden; diess giebt den Gränzwerth:

$$\frac{\pi}{2}\left[f(-\pi+2\pi) + f(-\pi+0)\right] - \frac{\pi}{2} f(-\pi+0)$$

$$= \frac{\pi}{2} f(\pi)\,.$$

Die Summe der in Nr. (4) vorkommenden unendlichen Reihe wird demnach

$$\frac{\pi}{2} f(+0)\,, \quad 0\,, \quad \frac{\pi}{2} f(\pi+0)$$

je nachdem

$$\alpha = 0\,, \quad \pi > \alpha > 0\,, \quad \alpha = \pi$$

ist. Addiren wir jetzt die Reihen in (3) und (4) unter Berücksichtigung

ihrer Summen, so findet sich nach beiderseitiger Division mit π, dass die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt + \cos a\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt + \cos 2a\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos 2t\,dt + \ldots.$$

durch

$$f(0),\quad \frac{f(a-0)+f(a+0)}{2},\quad f(\pi)$$

ausgedrückt wird, je nachdem $a=0$, zwischen 0 und π enthalten oder $=\pi$ ist. Bleibt nun die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=a$ stetig, so ist

$$\frac{f(a-0)+f(a+0)}{2} = f(a)$$

erleidet sie aber daselbst eine Unterbrechung der Continuität, so ist der vorstehende Ausdruck das arithmetische Mittel aus den beiden Werthen, welche ihr an der genannten Stelle zukommen. Schreiben wir x für a und setzen zur Abkürzung

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt \tag{8}$$

so erhalten wir jetzt folgendes Theorem:

Bleibt die Funktion $f(x)$ endlich und stetig von $x=0$ bis $x=\pi$, so gilt die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \ldots \tag{9}$$

für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\pi$ inclusive beider Gränzen; erleidet sie aber an irgend einer Stelle dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch dabei unendlich zu werden, so ist die Summe der obigen Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche dem $f(x)$ an jener Stelle zukommen.

Durch Subtraktion der Reihe (4) von der in (3), unter Berücksichtigung ihrer Summen, ergiebt sich ganz ähnlich, dass die unendliche Reihe

$$\sin a\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt + \sin 2a\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin 2t\,dt + \ldots.$$

die Ausdrücke

$$0\,,\quad \frac{f(\alpha-0)+f(\alpha+0)}{2}\,,\quad 0$$

zur Summe hat, je nachdem $\alpha=0$, $\pi>\alpha>0$, oder $\alpha=\pi$ ist. Wir können daher dem obigen Theoreme das folgende an die Seite stellen, worin zur Abkürzung

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \tag{10}$$

gesetzt worden ist.

Bleibt die Funktion $f(x)$ endlich und stetig von $x=0$ bis $x=\pi$, so gilt die Gleichung

$$f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots. \tag{11}$$

für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\pi$ exclusive beider Gränzen, an welchen die Reihe verschwindet; erleidet aber $f(x)$ an irgend einer Stelle dieses Intervalles eine Unterbrechung der Continuität, ohne jedoch unendlich zu werden, so ist die Summe der obigen Reihe gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche dem $f(x)$ an jener Stelle zukommen.

Für negative x gelten beide Theoreme nur in besonderen Fällen, das erste, wenn die Funktion $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x)=f(x)$ besitzt, das zweite, wenn $f(-x)=-f(x)$ ist.

§. 6.

Die Allgemeinheit der beiden Theoreme in (9) und (11) lässt eine grosse Anzahl spezieller Beispiele zu, von denen wir einige der hauptsächlichsten mehr andeuten, als entwickeln wollen, da es sich bei diesem Calcül immer nur um ganz gewöhnliche Integrationen handelt.

I. Beispiele für das Theorem in Nr. (9).

1) Für $f(x)=x$ findet man leicht unter Anwendung der bekannten Reduktionsformel

$$\int U V\,dt = U\int V\,dt - \int d\,U \int V\,dt$$

für $U = t$, $V = \cos nt$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

und hieraus ohne Schwierigkeit

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right\} \\ \pi \geqq x \geqq 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

für $x = 0$ oder $x = \pi$ erhält man hieraus eine schon bekannte Summenformel, für $x = \frac{\pi}{2}$ eine blose Identität.

2) Nehmen wir $f(x) = \cos \mu x$, wo μ einen beliebigen Bruch bedeuten soll, so wird

$$\int \cos \mu t \cos nt\, dt = \tfrac{1}{2} \int \cos (\mu - n) t + \tfrac{1}{2} \int \cos (\mu + n) t$$

woraus sich dann weiter ergiebt

$$A_n = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \mu^2}$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{\cos \mu x}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu \cos x}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu \cos 2x}{2^2 - \mu^2} + \frac{\mu \cos 3x}{3^2 - \mu^2} - \ldots \\ \pi \geqq x \geqq -\pi \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

indem die Formel auch für negative x gilt vermöge der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$, welche $\cos \mu x$ zukommt. Die Spezialisirung $x = \pi$ giebt

$$\frac{\pi}{2} \cot \mu\pi = \frac{1}{2\mu} - \frac{\mu}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu}{2^2 - \mu^2} - \frac{\mu}{3^2 - \mu^2} - \ldots \quad (3)$$

was mit einer anderwärts bekannten Formel übereinstimmt. Multiplizirt man diese Gleichung mit $2\,d\mu$, integrirt und bezeichnet die Constante der Integration mit lk, so findet man leicht:

$$l \sin \mu\pi = lk + l\mu + l(1^2 - \mu^2) + l(2^2 - \mu^2) + \ldots$$

oder

$$\frac{\sin \mu\pi}{\mu} = k(1^2 - \mu^2)(2^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2) \ldots$$

Durch Uebergang zur Gränze für unausgesetzt bis zur Null abnehmende μ findet sich hieraus

$$\pi = k\,1^2 . 2^2 . 3^3 \ldots\ldots$$

und wenn man mit dieser Gleichung in die vorhergehende dividirt

$$\frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi} = \left(1 - \frac{\mu^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{3^2}\right) \ldots\ldots \qquad (4)$$

Setzt man hier $\mu\pi = u$, so kommt man auf die bekannte Formel

$$\sin u = u\left(1 - \frac{u^2}{1^2\,\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{2^2\,\pi^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{3^2\,\pi^2}\right) \ldots\ldots \qquad (5)$$

aus welcher man mittelst der Relation $\cos u = \frac{\sin 2u}{2\sin u}$ leicht die entsprechende Formel für den Cosinus ableitet.

3) Erinnert man sich der Integrationsformel

$$\int e^{ct} \cos nt\, dt = \frac{n \sin nt + c \cos nt}{c^2 + n^2} e^{ct}$$

so findet man leicht

$$\int_0^\pi e^{ct} \cos nt\, dt = \frac{c}{c^2 + n^2}\left(e^{c\pi} \cos n\pi - 1\right)$$

und wenn man $c = +a$, $c = -a$ setzt und addirt

$$\int_0^\pi \left(e^{at} + e^{-at}\right) \cos nt\, dt = \frac{a \cos n\pi}{a^2 + n^2}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right).$$

Für $f(x) = e^{ax} + e^{-ax}$ ergiebt sich hieraus

$$A_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{a(-1)^n}{a^2 + n^2}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)$$

und dann weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} &= \frac{1}{2a} - \frac{a \cos x}{a^2 + 1^2} + \frac{a \cos 2x}{a^2 + 2^2} - \ldots\ldots \\ \pi &\geqq x \geqq -\pi . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Will man auf der rechten Seite den Zeichenwechsel wegschaffen, so braucht man nur $\pi - x$ für x zu setzen; die gefundenen zwei Formeln lassen sich dann wieder durch Subtraktion und Addition combiniren. Auch kann man für $x = \pi$ durch Multiplikation mit $2da$ und Integration ein Resultat ableiten, welches für $a\pi = u$ das Nämliche giebt, wie die Formel (5), wenn man in ihr $u\sqrt{-1}$ an die Stelle von u setzt.

II. Beispiele für das Theorem in (11).

1) Nimmt man $f(x)$ constant und zwar am einfachsten $= 1$, so wird

$$B_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 - \cos n\pi}{n}$$

und hieraus findet man leicht

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots \\ &\pi > x > 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Für negative x ist die Summe der Reihe $= -\frac{\pi}{4}$, für $x = 0$ das arithmetische Mittel aus $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$. Ueberhaupt würde es sehr leicht sein, die Curve $y = \varphi(x)$ zu construiren, welche die jedesmalige Summe der Reihe (7) darstellt; von $x = 0$ bis $x = \pi$ nämlich ist dieselbe eine Parallele zur Achse der x in der Entfernung $y = \frac{\pi}{4}$, von $x = \pi$ bis $x = 2\pi$ wieder eine Parallele in der Entfernung $y = -\frac{\pi}{4}$, von $x = 2\pi$ bis $x = 3\pi$ in der Entfernung $+\frac{\pi}{4}$ u. s. f. Ebenso ist die Sache auf der negativen Seite der Abscissenachse. An allen den Stellen 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$ etc. findet eine Unterbrechung der Stetigkeit statt, indem die Curve aus $\pm\frac{\pi}{4}$ in $\mp\frac{\pi}{4}$ überspringt, die Summe der obigen Reihe ist dann jedesmal $= 0$. — Die Formel (7) enthält auch die Leibnitz'sche Reihe als den speziellen Fall $x = \frac{\pi}{2}$ in sich.

2) Die Annahme $f(x) = x$ giebt

$$B_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

und hieraus findet man

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots . \\ &\pi > x > -\pi\end{aligned}\right\} (8)$$

die erweiterte Bedingung, welche hier angegeben ist, folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass $\frac{x}{2}$ mit $\sin mx$ gleichzeitig verschwindet und negativ wird. Auch hier würde es sehr leicht sein, eine graphische Darstellung der Funktion $y = \varphi(x)$ zu geben, welche die Summe der Reihe darstellt. Die fragliche Curve besteht nämlich aus einer unendlichen Menge von Geraden, welche die Abscissenachse in den Punkten $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$ etc. schneiden und mit ihr den Winkel $Arctan\,\frac{1}{2}$ machen. Jede solche Gerade liegt zur Hälfte über und zur Hälfte unter der Abscissenachse, und jedes dieser beiden Stücke hat die Länge $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$.

Schreibt man in Nr. (8) $\pi - x$ für x, so ergiebt sich noch

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi - x}{2} &= \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots . \\ &2\pi > x > 0\end{aligned}\right\} (9)$$

und durch Addition von (8) und (9) würde man auf die Formel (7) zurückkommen.

3) Nimmt man unter Voraussetzung eines gebrochenen μ, $f(x) = \sin \mu x$, so gelangt man leicht zu dem Werthe

$$B_n = \frac{2}{\pi}\sin \mu\pi \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - \mu^2}$$

woraus man leicht die Formel:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi} &= \frac{\sin x}{1^2-\mu^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\mu^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\mu^2} - \cdots \\ &\pi > x > -\pi\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ableitet, die man auch durch Differenziation der Gleichung (2) erhalten kann.

4) Benutzt man die bekannte Formel

$$\int e^{ct}\sin nt\,dt = \frac{c\sin nt - n\cos nt}{c^2+n^2}\,e^{ct}$$

für die Annahme $f(x) = e^{ax} - e^{-ax}$, so findet man

$$B_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)$$

und hieraus sehr leicht:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}} &= \frac{\sin x}{a^2+1^2} - \frac{2\sin 2x}{a^2+2^2} + \frac{3\sin 3x}{a^2+3^2} - \cdots \\ &\pi > x > -\pi.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Schreibt man $\pi - x$ für x so erhält die Reihe lauter positive Glieder; die beiden so gewonnenen Resultate lassen dann wieder Combinationen durch Addition und Subtraktion zu.

§. 7.

Für die Anwendung des ersten der beiden allgemeinen Theoreme ist noch eine Transformation von Wichtigkeit, welche das Integral

$$\int_0^\pi f(t)\cos nt\,dt$$

betrifft, sobald die Funktion f eine Funktion von $\cos t$ ist und also das Integral unter der Form

$$\int_0^\pi f(\cos t)\cos nt\,dt$$

steht. Die erwähnte, von Jacobi*) entwickelte Umformung beruht auf folgendem einfachen Satze. Wenn die Funktion $\psi(x)$ so beschaffen ist, dass sie sich sowohl für $x = a$ als $x = b$ annullirt und wenn ihre Differenzialquotienten bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ inclusive die nämliche Eigenschaft besitzen, so ist

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_a^b \psi^{(n)}(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

Von der Richtigkeit desselben überzeugt man sich sehr leicht durch successive Anwendung der bekannten Formel für die theilweise Integration, wovon wir wenigstens den ersten Schritt andeuten wollen. Es ist nämlich

$$\int \psi(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = \psi(x)\int \varphi^{(n)}(x)\,dx - \int \psi'(x)\,dx \int \varphi^{(n)}(x)\,dx$$
$$= \psi(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) - \int \psi'(x)\,dx\,\varphi^{(n-1)}(x)$$

führt man nun die Gränzen $x = a$, $x = b$ ein und bemerkt, dass der Voraussetzung nach $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 0$ ist, so bleibt

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi^{(n)}(x)\,dx = -\int_a^b \psi'(x)\,\varphi^{(n-1)}(x)\,dx\,.$$

Wendet man rechts wieder das nämliche Verfahren an und berücksichtigt die Voraussetzung $\psi'(a) = 0$, $\psi'(b) = 0$, so geht das fragliche Integral in

$$+\int_a^b \psi''(x)\,\varphi^{(n-2)}(x)\,dx$$

über und man übersieht auf der Stelle, dass die $n$malige Wiederholung des Prinzips der theilweisen Integration zu dem in (1) ausgesprochenen Satze führen muss. Nimmt man in demselben

$$\psi(x) = (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad a = -1, \quad b = +1$$

---

*) M. s. hierüber die schöne Abhandlung Jacobi's in Crelle's *Journal*, *Band* 15, *S.* 1.

so sind die dem $\psi(x)$ auferlegten Bedingungen erfüllt, wie man leicht sehen wird; nach Nr. (1) wird dann

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} q(x)\,dx .$$

Andererseits hat man das Theorem *)

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\,1.3.5..(2n-1)}{n} \sin(n\,Arccos\,x)$$

und folglich ist auch

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \varphi^{(n)}(x)\,dx = \frac{-1.3.5..(2n-1)}{n} \int_{-1}^{1} \frac{d\sin(n\,Arccos\,x)}{dx} q(x)\,dx .$$

Streicht man in dem Integrale rechts dx gegen dx, setzt darauf $Arccos\,x = t$, also $x = cos\,t$, und bemerkt, dass für $x = -1$ und $x = +1$ für t die Werthe $t = \pi$, $t = 0$ eintreten, so ergiebt sich

$$\int_{\pi}^{0} \sin^{2n-1} t\,\varphi^{(n)}(cos\,t)\,d\cos t = \frac{-1.3.5..(2n-1)}{n} \int_{\pi}^{0} d\sin(nt)\,q(cos\,t)$$

d. i. bei Vertauschung der Gränzen

$$\int_{0}^{\pi} \sin^{2n} t\,\varphi^{(n)}(cos\,t)\,dt = 1.3.5..(2n-1) \int_{0}^{\pi} cos\,nt\;q(cos\,t)\,dt$$

und durch Transposition wenn man f für φ schreibt

$$\int_{0}^{\pi} f(cos\,t)\,cos\,nt\,dt = \frac{1}{1.3.5..(2n-1)} \int_{0}^{\pi} f^{(n)}(cos\,t)\,\sin^{2n} t\,dt . \qquad (2)$$

*) M. s. mein *Handbuch der Differenzialrechnung*, S. 91.

Um den Gebrauch dieser sehr umfassenden Formel wenigstens an einem Beispiele zu zeigen, wollen wir

$$f(z) = (1 - 2az + a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

setzen, woraus

$$\frac{f^{(n)}(z)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} = a^n (1 - 2az + a^2)^{-(n+\frac{1}{2})}$$

folgt. Die Jacobische Reduktionsformel giebt dann sogleich

$$\int_0^\pi \frac{\cos nt \, dt}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} t \, dt}{(1 - 2a\cos t + a^2)^{n+\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

wobei das Integral rechts, welches wir in der Gestalt

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}}\right)^{2n} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}} \tag{4}$$

darstellen, noch einer bedeutenden schon von Landen angewendeten Transformation fähig ist. Man setze nämlich

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}} = \sin u \tag{5}$$

wo u eine neue Variable ist, so findet man zuvörderst sehr leicht:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}}{1 - a\cos t}. \tag{6}$$

Durch Differenziation der Gleichung

$$u = Arcsin \frac{\sin t}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}}$$

ergiebt sich ferner

$$du = \frac{(1 - a\cos t)\, dt}{1 - 2a\cos t + a^2} \tag{7}$$

und durch Multiplikation der Gleichungen (6) und (7)

$$\frac{dt}{\sqrt{1-2a\cos t+a^2}} = \frac{du}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}}.$$

Substituiren wir diess und Nr. (5) in das Integral (4) oder (3), so wird jetzt

$$\int_0^\pi \frac{\cos nt\, dt}{\sqrt{1-2a\cos t+a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} u\, du}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}}. \qquad (8)$$

Diese spezielle Transformation hat bereits Legendre gefunden *). Um den Werth des Integrales rechts zu bestimmen, muss man entweder zu elliptischen Funktionen oder zu unendlichen Reihen seine Zuflucht nehmen. Das letztere geht auf verschiedene Weise. So hat man, da im Integrale $a<1$ vorausgesetzt werden muss,

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2 u}} = 1 + \tfrac{1}{2}a^2\sin^2 u + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}a^4\sin^4 u + \ldots\ldots$$

und folglich das Integral auf der rechten Seite in (8)

$$\left.\begin{aligned} &= \int_0^\pi \sin^{2n} u\, du + \tfrac{1}{2}a^2\int_0^\pi \sin^{2n+2} u\, du \\ &\qquad + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}a^4\int_0^\pi \sin^{2n+4} u\, du + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Die einzelnen hier vorkommenden Integrale stehen unter der Form

$$\int_0^\pi \sin^{2n+2p} u\, du = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2p} u\, du$$

indem man nur zu bemerken braucht, dass $\sin^{2n+2p} u$ von $u=\frac{\pi}{2}$ bis $u=\pi$ die nämlichen Werthe annimmt, die es von $u=0$ bis $u=\frac{\pi}{2}$

*) *Traité des fonctions elliptiques, Tome II, page* 536, *formule* (10).

schon einmal gehabt hat. Andererseits ist bekanntlich für ein ganzes positives m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} u\, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \,..\, (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \,..\, (2m)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und wenn man diess für die Reihe (9) in Anwendung bringt, so findet man sogleich nach Nr. (8)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nt\, dt}{\sqrt{1 - 2a\cos t + a^2}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \,..\, (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \,..\, (2n)} a^n \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} a^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} a^4 + \ldots\ldots\right\}.$$

Die Reihe convergirt indess nur langsam, namentlich bei sehr grossen n; eine brauchbarere dagegen findet man durch die Bemerkung, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 \cos^2 t}{1-a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{1-a^2} \cos^2 t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2 \cos^4 t - \ldots\ldots\right\}$$

etc. ist, wo es nun nach Multiplikation mit $\sin^{2n} u\, du$ und Integration nur darauf ankommt, ein Integral von der Form

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} u \cos^{2p} u\, du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} u \cos^{2p} u\, du \qquad (10)$$

seinem Werthe nach zu bestimmen. Diess ist aber sehr leicht; setzt man nämlich $\sin^2 u = z$, so findet man, dass das Integral rechts auch gleich ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 u)^{n-\frac{1}{2}} (1 - \sin^2 u)^{p-\frac{1}{2}} 2 \sin u \cos u\, du$$

$$= \int_0^1 z^{n-\frac{1}{2}} (1-z)^{p-\frac{1}{2}} dz$$

dessen Werth bekanntlich durch

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n+2p)}\,\pi$$

ausgedrückt wird, wofür man auch

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n)}\cdot\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2p-1)}{(2n+2)\,(2n+4)\,\ldots\,(2n+2p)}\,\pi$$

schreiben kann. In so fern hierdurch jedes Integral von der in (10) angegebenen Form seinen Werth findet, hat man nun nach dem Vorhergehenden

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos nt\,dt}{\sqrt{1-2a\cos t+a^2}}$$

$$=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2n)}\cdot\frac{\pi a^n}{\sqrt{1-a^2}}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1\,.\,3}{(2n+2)\,(2n+4)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2-\ldots.\right\}.$$

Diese Reihe convergirt sehr stark, wenn $\frac{a^2}{1-a^2}<1$, d. h. $a<\sqrt{\frac{1}{2}}$ und n eine grosse Zahl ist. — Will man also die Coeffizienten in der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\\&=\tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+A_3\cos 3x+\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

bestimmen, so ist nach dem eben entwickelten Resultate:

$$A_n=\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{2\,.\,4\,\ldots\,(2n)}\,\frac{2a^n}{\sqrt{1-a^2}}\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+2}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1\,.\,3}{(2n+2)\,(2n+4)}\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)^2-\ldots.\right\}.\qquad(12)$$

§. 8.

Wir kehren nach dieser Digression zu den Formeln

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots . \\ A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots . \\ B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

zurück, um zu zeigen, wie sich dieselben so weit ausdehnen lassen, dass x nicht mehr zwischen den Gränzen 0 und π eingeschlossen zu sein braucht, sondern sich in dem ganz beliebigen Spielraume $-c$ bis $+c$ bewegen darf, sobald man nur eine Transformation mit den obigen Formeln vornimmt.

Die Gleichung (1) gilt, wie wir wissen, von $x=0$ bis $x=+\pi$, würde aber auch von $x=0$ bis $x=-\pi$ noch richtig bleiben, wenn $f(-x)$ zufällig $=f(x)$ wäre. Es ist sehr leicht, für $f(x)$ eine ganz allgemeine Substitution zu treffen, bei welcher die genannte Eigenschaft stattfindet, nämlich die folgende

$$f(x) = \frac{q(x) + q(-x)}{2}$$

worin q eine ganz willkührliche Funktion bezeichnen darf. Es wird jetzt

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(t)\cos nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q(-t)\cos nt\, dt$$

und hier geht das zweite Integral durch die Substitution $t=-t'$ in

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi} q(t')\cos nt'\, dt' = +\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} q(t)\cos nt\, dt$$

über, wenn man berücksichtigt, dass in einem bestimmten Integrale

die Wahl des Integrationsbuchstabens ganz gleichgültig ist. Der Werth von A_n gestaltet sich jetzt wie folgt

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt \tag{3}$$

und nun gilt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + A_3\cos 3x + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$.

Die Formel (2) besteht nur für $\pi > x > 0$, sie würde aber auch für $x = 0$ und negative x richtig bleiben, wenn die Funktion $f(x)$ die Eigenschaften $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ besässe. Diesen Bedingungen genügt die Annahme

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$$

bei welcher

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(-t)\sin nt\,dt$$

wird. Für $t = -t'$ tritt hier die Umformung

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(-t)\sin nt\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{-\pi} \varphi(t')\sin nt'\,dt'$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \varphi(t)\sin nt\,dt$$

ein, durch die man

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt \tag{5}$$

erhält. Für die so bestimmten Werthe der Coeffizienten gilt nun die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} \\ = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots .\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

unter der erweiterten Bedingung $\pi > x > -\pi$.

Addiren wir jetzt die Gleichungen (4) und (6), wobei wieder f an die Stelle von φ treten möge, so wird

$$\left.\begin{aligned}f(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wobei die Coeffizienten durch die Formeln

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \quad (8)$$

bestimmt werden. Die Gleichung (7) gilt für alle Werthe von x, welche innerhalb des Intervalles $-\pi$ bis $+\pi$ liegen, für $x = \pm\pi$ dagegen ist nicht $f(\pi)$, sondern $\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$ die Summe der fraglichen Reihe.

Um endlich die Formeln (1), (2) und (7) auf ein beliebiges Intervall ausdehnen zu können, setzen wir $\frac{\pi x}{c}$ und $\frac{\pi t}{c}$ für x und t, zugleich nehmen wir $f(\frac{\pi x}{c}) = \varphi(x)$, wobei φ eine noch ganz willkührliche Funktion bleibt.

Die Gränzen für die Gültigkeit der Formel (1), nämlich $\pi \geqq x \geqq 0$, gehen jetzt in

$$\pi \geqq \frac{\pi x}{c} \geqq 0 \quad \text{d. i.} \quad c \geqq x \geqq 0$$

über, und bilden nun die Gränzen für die Gültigkeit der neuen Formel:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots . \quad (9)$$

Irgend ein Coeffizient ist hier wegen $f(\frac{nt}{c}) = q(t)$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int q(t) \cos \frac{nnt}{c} \, d\left(\frac{nt}{c}\right)$$

wobei die Integrationsgränzen, welche für das frühere t Null und π waren, jetzt durch die Gleichungen $\frac{nt}{c} = 0$, $\frac{nt}{c} = \pi$ bestimmt werden. Es ergiebt sich so:

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^c q(t) \cos \frac{nnt}{c} \, dt \,. \tag{10}$$

Nimmt man ganz dieselben Transformationen mit der Formel (2) vor, so findet man ebenso leicht

$$q(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{c} + \ldots . \tag{11}$$

gültig unter der Bedingung $c > x > 0$, wobei

$$B_n = \frac{2}{c} \int_0^c q(t) \sin \frac{nnt}{c} \, dt \tag{12}$$

ist. Endlich giebt die Gleichung (7) auf dieselbe Weise behandelt:

$$\left.\begin{aligned} q(x) = {} & \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{c} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \ldots . \\ & + B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{c} + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} q(t) \cos \frac{nnt}{c} \, dt \,, \quad B_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} q(t) \sin \frac{nnt}{c} \, dt \tag{14}$$

wobei die Gültigkeit der Formel (13) an die Bedingung $c > x > -c$ gebunden ist, vermöge deren man die Formel selbst auf jedes beliebige noch so grosse Intervall ausdehnen kann.

§. 9.

Aus der in §. 5 gegebenen Darstellung geht hervor, dass die gesammte Theorie derjenigen Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, nur ein einfaches Beispiel für die Regeln bildet, nach denen man den Gränzwerth des Integrales

$$\int_0^c \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\, dt$$

für unendlich wachsende k bestimmt. Die grosse Allgemeinheit, welche diesen Regeln inwohnt, liess erwarten, dass durch einen geschickten Griff sich auch noch andere Anwendungen derselben vermitteln lassen würden, wodurch man auf Sätze kommen muss, die mit den bisher entwickelten eine gewisse Familienähnlichkeit haben werden. Diese Hoffnung ist durch Lejeune Dirichlet erfüllt worden, indem er durch eine elegante Analyse gezeigt hat, dass wenn die Summe einer endlichen oder unendlichen Reihe von der Form

$$C_0 + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \ldots.$$

bekannt ist, auch immer die Summen der beiden Reihen

$$C_0 + C_1 \cos \omega + C_2 \cos 4\omega + C_3 \cos 9\omega + \ldots.$$
$$C_1 \sin \omega + C_2 \sin 4\omega + C_3 \sin 9\omega + C_4 \sin 16\omega + \ldots.$$

worin ω einen aliquoten Theil der Kreisperipherie bezeichnet, gefunden werden können *). Nennt man die bisher betrachteten Reihen: Cosinus- oder Sinusreihen erster Stufe, so lässt sich das Dirichlet'sche Theorem als eine Summenformel für die Cosinus- und Sinusreihen zweiter Stufe bezeichnen, in so fern hier die Vielfachen des Bogens eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden. Bei dem Interesse, was dieser Gegenstand hat, glauben wir die Theorie der Cosinus- und Sinusreihen nicht besser als durch eine Darstellung der genannten Untersuchung beschliessen zu können.

---

*) *Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre* 1835, erschienen 1837; oder: *Crelle's Journal, Band* 17.

Der erste Schritt derselben besteht in der einfachen Bemerkung, dass die Werthe der beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz = a \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz = b \tag{1}$$

nothwendig endliche Grössen sind; man weiss zwar aus der Theorie der Gammafunktionen, dass $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ der gemeinschaftliche Werth der in Rede stehenden Integrale ist, kann aber auch hiervon ganz abstrahiren, weil sich die Grössen a und b durch die nachfolgende Analyse von selbst bestimmen. Ihre Endlichkeit erkennt man leicht durch Zerlegung der obigen Integrale in andere von solchen Integrationsintervallen, dass $\cos z$ oder $\sin z$ innerhalb derselben ihre jedesmaligen Vorzeichen nicht wechseln. So ist:

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz + \ldots.$$

und wenn man im zweiten Integrale $z = \frac{\pi}{2} + y$, im dritten $z = \frac{3\pi}{2} + y$, etc. setzt, so ergiebt sich sehr leicht

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,dz - \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + y}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{3\pi}{2} + y}} + \ldots \right\} \sin y\,dy.$$

Da $\cos z$ die Einheit nicht übersteigt, so folgt, dass das erste Integral nicht mehr als

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

betragen kann; im zweiten Integrale ist die Summe der in Parenthese stehenden Reihe offenbar eine positive Grösse und

$$< \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+y}} \text{ also um so mehr } < \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

und mithin beträgt der Werth des fraglichen Integrales weniger als

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\pi} \sin y \, dy = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Hieraus folgt sogleich, dass a eine endliche Grösse ist.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich von der Endlichkeit des b, indem man das betreffende Integral in andere Integrale zerlegt, welche die Intervalle 0 bis π, π bis 2π, 2π bis 3π, etc. umfassen und im zweiten Integrale $z = \pi + x$, im dritten: $z = 2\pi + x$ u. s. f. substituirt.

Nimmt man in den Integralen unter Nr. (1) $z = t^2$, so gehen dieselben in

$$2\int_0^{\infty} \cos(t^2)\, dt = a, \quad 2\int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt = b$$

über, wofür man auch schreiben kann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2)\, dt = a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2)\, dt = b$$

weil die Funktionen $\cos(t^2)$ und $\sin(t^2)$ von $t = 0$ bis $t = -\infty$ dieselben Werthe haben, wie von $t = 0$ bis $t = +\infty$. Setzt man ferner $t = u + p$, wo u die neue Variable, p eine arbiträre Constante ist, so ändern sich die Integrationsgränzen nicht, und wenn man $\cos[(p+u)^2] = \cos[(p^2+u^2) + 2pu]$ zerlegt, so wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(p^2+u^2)\cos 2pu\,du \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} \sin(p^2+u^2)\sin 2pu\,du = a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(p^2+u^2)\cos 2pu\,du \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} \cos(p^2+u^2)\sin 2pu\,du = b\,.$$

Hier verschwinden diejenigen Integrale, in welchen $\sin 2pu$ vorkommt; denn denkt man sich jedes derselben in zwei andere von $u=0$ bis $u=\infty$ und $u=0$ bis $u=-\infty$ zerlegt, so hebt das zweite das erste auf, weil $\sin(p^2+u^2)\sin 2pu$ und $\cos(p^2+u^2)\sin 2pu$ die Eigenschaft $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ besitzen. Es bleiben daher in den obigen Gleichungen nur die jedesmalig ersten Integrale stehen, in welchen man $\cos(p^2+u^2)$ und $\sin(p^2+u^2)$ zerlegen kann. Diess giebt:

$$\cos(p^2)\int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^2)\cos 2pu\,du \;-\; \sin(p^2)\int_{-\infty}^{\infty} \sin(u^2)\cos 2pu\,du = a$$

$$\sin(p^2)\int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^2)\cos 2pu\,du \;+\; \cos(p^2)\int_{-\infty}^{\infty} \sin(u^2)\cos 2pu\,du = b$$

und wenn man hieraus die beiden unbekannten Integrale eliminirt, so erhält man leicht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^2)\cos 2pu\,du = a\cos(p^2) + b\sin(p^2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(u^2)\cos 2pu\,du = b\cos(p^2) - a\sin(p^2)$$

und für

$$p = n\sqrt{\omega}\,, \quad u = \frac{x}{2\sqrt{\omega}}$$

wo n und ω constante Grössen bedeuten,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) \cos nx \, dx = 2\sqrt{\omega}\left[a\cos(n^2\omega) + b\sin(n^2\omega)\right] \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) \cos nx \, dx = 2\sqrt{\omega}\left[b\cos(n^2\omega) - a\sin(n^2\omega)\right]. \quad (3)$$

Es sei nun eine Reihensummirung in der Art gegeben, dass

$$F(x) = C_0 + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + C_3 \cos 3x + \ldots. \quad (4)$$

ist, worin $F(x)$ eine bekannte Funktion bezeichnet, und zur Abkürzung sei

$$H = C_0 + C_1 \cos\omega + C_2 \cos 4\omega + C_3 \cos 9\omega + \ldots. \quad (5)$$

$$K = C_1 \sin\omega + C_2 \sin 4\omega + C_3 \sin 9\omega + \ldots. \quad (6)$$

so ist es sehr leicht, H und K in bestimmte Integrale zu verwandeln. Multiplizirt man nämlich die Gleichungen (2) und (3) mit C_n, setzt hierauf $n = 0, 1, 2, 3$, etc. und addirt Alles so entstehende, so ergiebt sich sogleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = 2\sqrt{\omega}\left[aH + bK\right] \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\, dx = 2\sqrt{\omega}\left[bH - aK\right] \quad (8)$$

woraus man H und K eliminiren könnte, was wir aber bis zuletzt versparen wollen. Berücksichtigt man noch, dass der Bedeutung von $F(x)$ nach $F(-x) = F(x)$ ist und die Funktionen $\cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right)$ und $\sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right)$ für negative x dieselben bleiben, wie für positive x, so kann man die vorigen Gleichungen auch in der folgenden Form darstellen:

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = \sqrt{\omega}\,\left[aH + bK\right] \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = \sqrt{\omega}\,\left[bH - aK\right] \tag{10}$$

und hier können wir die Integrale als die Gränzwerthe ansehen, denen sich die nachstehenden

$$\int_0^{(4r+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^{(4r+1)\pi} \sin\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx \tag{11}$$

für unendlich wachsende r nähern. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich mit Leichtigkeit ein Mittel um die Werthe der fraglichen Integrale zu finden.

I. Zuvörderst übersieht man sogleich die Richtigkeit der folgenden Zerlegung:

$$\int_0^{(4r+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx + \int_{\pi}^{3\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$

$$+ \int_{3\pi}^{5\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx + \ldots + \int_{(4r-1)\pi}^{(4r+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx \tag{12}$$

wobei alle Integrale rechts mit Ausschluss des ersten von der Form

$$\int_{(2q-1)\pi}^{(2q+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx \tag{13}$$

sind und daraus hervorgehen, wenn man $q = 1, 2, \ldots 2r$ setzt. Für $x = 2q\pi + y$ verwandelt sich dieses Integral in:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + 4q\pi y + y^2}{4\omega}\right) F(y)\,dy$$

wenn man bemerkt, dass der Bedeutung von $F(x)$ zufolge $F(2q\pi + y) = F(y)$ ist. Zerlegt man dieses wieder in

$$\int_{-\pi}^{0} \cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + 4q\pi y + y^2}{4\omega}\right) F(y)\,dy + \int_{0}^{\pi} \cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + 4q\pi y + y^2}{4\omega}\right) F(y)\,dy$$

und setzt im ersten Integrale $y = -x$, im zweiten $y = x$, so wird $F(-x) = F(x)$, beide Integrale erhalten gleiche Gränzen und können dann in ein einziges zusammengezogen werden, nämlich

$$\int_{0}^{\pi} \left\{\cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2 - 4q\pi x}{4\omega}\right) + \cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2 + 4q\pi x}{4\omega}\right)\right\} F(x)\,dx$$

das unter Anwendung der Formel

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

sich wie folgt gestaltet:

$$2\int_{0}^{\pi} F(x)\cos\left(\frac{4q^2\pi^2 + x^2}{4\omega}\right)\cos\frac{q\pi x}{\omega}\,dx\,.$$

Nehmen wir hierin $q = 1, 2, 3, \ldots (2r)$ so erhalten wir die in Nr. (12) vorkommenden Integrale, mit Ausschluss des ersten, in solcher Form, dass jetzt überall gleiche Integrationsgränzen stehen; man kann daher die Integrale in das folgende einzige zusammenziehen

$$\int_{0}^{(4r+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} X F(x)\,dx \qquad (14)$$

worin zur Abkürzung

$$X = \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) + 2\cos\left(\frac{4.1^2\pi^2 + x^2}{4\omega}\right)\cos\frac{\pi x}{\omega}$$
$$+ 2\cos\left(\frac{4.2^2\pi^2 + x^2}{4\omega}\right)\cos\frac{2\pi x}{\omega}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2\cos\left(\frac{4.\overline{2r}^2\pi^2 + x^2}{4\omega}\right)\cos\frac{\overline{2r}\,\pi x}{\omega} \qquad (15)$$

gesetzt worden ist. Es würde nun darauf ankommen, diese Reihe zu summiren. So lange ω ein ganz beliebiger Bogen ist, lässt sich aber diese Aufgabe nicht gut lösen, dagegen wird diess möglich, wenn man für ω einen aliquoten Theil der Kreisperipherie, also etwa $\omega = \frac{2\pi}{n}$ nimmt, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet. Das allgemeine Glied der Reihe (5), nämlich der Ausdruck

$$2\cos\left(\frac{q^2n^2}{\omega} + \frac{x^2}{4\omega}\right)\cos q\frac{\pi x}{\omega}$$

stellt sich in diesem Falle unter die Form:

$$2\cos\left(\frac{q^2n}{2}\pi + \frac{n.x^2}{8\pi}\right)\cos q\frac{n.x}{2}. \qquad (16)$$

Hier sind hinsichtlich der von 0 bis $2r$ gehenden Zahl q zwei Fälle zu unterscheiden, für ein gerades q ist nämlich q^2 und ebenso q^2n von der Form $4p$, dadurch wird $\frac{q^2n}{2}\pi$ zu einem geraden Vielfachen von π und mithin der Ausdruck in (16)

$$= 2\cos\left(\frac{nx^2}{8\pi}\right)\cos q\frac{nx}{2}. \qquad (17)$$

Für ein ungerades q dagegen steht q^2 unter der Form $4p+1$,

mithin $q^2 n$ unter der Form $4p' + n$, dadurch wird $\frac{q^2 n}{2}\pi = 2p'\pi + \frac{n\pi}{2}$ und der Ausdruck in (16)

$$2\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right)\cos q\frac{nx}{2}. \qquad (18)$$

Da nun die Reihe X dadurch gebildet wird, dass $q = 0, 1, 2, \ldots (2r)$ gesetzt und Alles addirt wird, wobei man aber das erste Glied nur halb nimmt, so ist in unserem Falle Alles zusammen zu nehmen, was aus Nr. (17) für $q = 0, 2, 4, 6, \ldots (2r)$ und aus Nr. (18) für $q = 1, 3, 5, \ldots (2r-1)$ hervorgeht; die fragliche Reihe X erscheint dann als die Summe der beiden folgenden Reihen:

$$2\cos\left(\frac{nx^2}{8\pi}\right)\left[\tfrac{1}{2} + \cos nx + \cos 2nx + \ldots + \cos rnx\right] \qquad (19)$$

und

$$2\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right)\left[\cos\frac{nx}{2} + \cos 3\frac{nx}{2} + \ldots + \cos(2r-1)\frac{nx}{2}\right]. \qquad (20)$$

Ihre Summen ergeben sich unmittelbar aus den bekannten Formeln

$$\tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos ru = \frac{\sin(2r+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$$

und

$$\cos u + \cos 3u + \cos 5u + \ldots + \cos(2r-1)u$$

$$= \frac{\sin(2r+1)u}{2\sin u}\cos u - \frac{\cos(2r+1)u}{2}.$$

Man findet nämlich, wenn k zur Abkürzung für $2r+1$ dient,

$$X = \frac{\sin k\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}} \cos\left(\frac{nx^2}{8\pi}\right)$$

$$+ \frac{\sin k\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right) \cos\frac{n.x}{2}$$

$$- \cos k\frac{nx}{2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right)$$

und folglich

$$\int_0^\pi XF(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin k\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}} F(x) \cos\left(\frac{nx^2}{8\pi}\right) dx$$

$$+ \int_0^\pi \frac{\sin k\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}} F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right) \cos\frac{nx}{2}\,dx$$

$$- \int_0^\pi \cos k\frac{nx}{2}\, F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{nx^2}{8\pi}\right) dx$$

oder wenn man rechts $\frac{nx}{2} = t$ d. i. $x = \frac{2t}{n}$ setzt

$$\int_0^\pi XF(x)\,dx = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} F\left(\frac{2t}{n}\right) \cos\left(\frac{t^2}{2n\pi}\right) dt$$

$$+ \frac{2}{n} \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} F\left(\frac{2t}{n}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{t^2}{2n\pi}\right) \cos t\,dt$$

$$- \frac{2}{n} \int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \cos kt\, F\left(\frac{2t}{n}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{t^2}{2n\pi}\right) dt\,.$$

Denken wir uns an der Stelle des Integrales links dasjenige, welches die linke Seite der Gleichung (14) bildet, und lassen jetzt r und somit auch $2r+1=k$ ins Unendliche wachsen, so sind auf die Integrale rechts die Regeln der Paragraphen 2 und 3 anwendbar; man findet nämlich

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{n}\left\{\tfrac{1}{2}F(0) + F\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{1^2\pi}{2n}\right) + F\left(\frac{4\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2^2\pi}{2n}\right) + \ldots.\right\}$$

$$+ \frac{2\pi}{n}\left\{\tfrac{1}{2}F(0)\cos\frac{n\pi}{2} - F\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{1^2\pi}{2n}\right)\right.$$

$$\left. + F\left(\frac{4\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2^2\pi}{2n}\right) - \ldots.\right\}$$

wobei die allgemeinen Formen der Glieder

$$F\left(\frac{2h\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{h^2\pi}{2n}\right) \quad \text{und} \quad F\left(\frac{2h\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{h^2\pi}{2n}\right)$$

sind. Für das letzte Glied ist noch eine Unterscheidung nöthig; wenn nämlich n gerade ist, so kann man $\frac{1}{2}n\pi = s\pi$ setzen und aus Formel (8) in §. 3 geht dann hervor, dass die letzten Glieder der beiden obigen Reihen diejenigen sind, welche $h=s$ entsprechen, aber nur zur Hälfte in Rechnung kommen; für ein ungerades n dagegen wird $\frac{1}{2}n\pi = \frac{1}{2}(n-1)\pi + \frac{1}{2}\pi = s\pi + \frac{1}{2}\pi$ und nun entsprechen die letzten Glieder dem Falle $h=s$, aber ganz gerechnet, wie man aus Formel (9) in §. 3 erkennt. Schreibt man wieder ω für $\frac{2\pi}{n}$ und berücksichtigt die Gleichung (9), so folgt leicht

$$\frac{aH + bK}{\sqrt{\omega}}$$

$$= \tfrac{1}{2}F(0) + F(\omega)\cos\left(\frac{1^2\omega}{4}\right) + F(2\omega)\cos\left(\frac{2^2\omega}{4}\right) + \ldots.$$

$$+ \tfrac{1}{2}F(0)\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega}\right) - F(\omega)\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right)$$

$$+ F(2\omega)\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \ldots. \qquad (21)$$

wobei hinsichtlich des letzten Gliedes die obige Bemerkung gilt.

II. Ganz die nämlichen Transformationen sind auf das zweite Integral in Nr. (11) anwendbar. Man zerlegt dasselbe in andere Integrale von 0 bis π, π bis 3π, 3π bis 5π etc. und betrachtet die allgemeine Form derselben:

$$\int_{(2q-1)\pi}^{(2q+1)\pi} \cos\left(\frac{x^2}{4\omega}\right) F(x)\,dx$$

entsprechend Nr. (13). Durch ganz dieselben Transformationen, welche dort angewendet wurden, geht dasselbe in

$$2\int_0^{\pi} F(x)\,\sin\left(\frac{4q^2\pi^2+x^2}{4\omega}\right)\,\cos\frac{q\pi x}{\omega}\,dx$$

über, welches auf eben dieselbe Weise benutzt wird, wie das frühere analoge Integral. Man findet zuletzt, dass es auf den Gränzwerth von

$$\frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin kt}{\sin t}\,F\left(\frac{2t}{n}\right)\,\sin\left(\frac{t^2}{2n\pi}\right)\,dt$$

$$+\ \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \frac{\sin kt}{\sin t}\,F\left(\frac{2t}{n}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{t^2}{2n\pi}\right)\,\cos t\,dt$$

$$-\ \frac{2}{n}\int_0^{\frac{1}{2}n\pi} \cos kt\;F\left(\frac{2t}{n}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{t^2}{2n\pi}\right)\,dt$$

ankommt. So gelangt man am Ende zu der Gleichung:

$$\frac{bH-aK}{\sqrt{\omega}}$$

$$= F(\omega)\,\sin\left(\frac{1^2\omega}{4}\right) + F(2\omega)\,\sin\left(\frac{2^2\omega}{4}\right) + F(3\omega)\,\sin\left(\frac{3^2\omega}{4}\right) + \ldots$$

$$+\ \tfrac{1}{2}F(0)\,\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega}\right) - F(\omega)\,\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega}+\frac{1^2\omega}{4}\right)$$

$$+ F(2\omega)\,\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega}+\frac{2^2\omega}{4}\right) - \ldots. \qquad (22)$$

wo hinsichtlich des letzten Gliedes beider Reihen die nämlichen Bemerkungen gelten, wie bei der Formel (21). Eliminirt man jetzt aus den Gleichungen (21) und (22) die Grössen H und K, so findet man die Summen der Reihen, für welche H und K als Abkürzung dienten. Wählt man aber die ursprüngliche, durch $F(x)$ summirte Reihe so, dass man H und K a priori kennt, so gelangt mau zur Kenntniss der Constanten a und b. Diess Letztere ist der Fall, wenn man in der Reihe für $F(x)$, $C_0 = 1$, $C_1 = C_2 = C_3$ etc. $= 0$ nimmt. Es wird dann $F(x) = 1$, $H = 1$, $K = 0$; und mithin nach (21) und (22)

$$\frac{a}{\sqrt{\omega}} = \tfrac{1}{2} + \cos\left(\frac{1^2\omega}{4}\right) + \cos\left(\frac{2^2\omega}{4}\right) + \cos\left(\frac{3^2\omega}{4}\right) + \ldots.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi^2}{\omega}\right) - \cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \ldots.$$

und

$$\frac{b}{\sqrt{\omega}} = \sin\left(\frac{1^2\omega}{4}\right) + \sin\left(\frac{2^2\omega}{4}\right) + \sin\left(\frac{3^2\omega}{4}\right) + \ldots.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi^2}{\omega}\right) - \sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{1^2\omega}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi^2}{\omega} + \frac{2^2\omega}{4}\right) - \ldots.$$

und diese Gleichungen müssen nun blosse Identitäten vorstellen, welchen Werth man auch $\omega = \frac{2\pi}{n}$ geben möge. Nimmt man ganz einfach $n = 1$, also $\omega = 2\pi$, so ergiebt sich

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}, \quad \frac{b}{\sqrt{2\pi}} = \tfrac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}$$

d. i.

$$a = b = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Um ein einfaches Beispiel zu haben, setzen wir

$$F(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x$$

$$= \tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Es ist dann für ein ganzes positives h

$$F(h\omega) = \tfrac{1}{2} + \frac{\sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{2h\pi}{n}}{2\sin\frac{h\pi}{n}}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \frac{\sin\left(2h\pi - \frac{h\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{h\pi}{n}}$$

d. i. wenn n nicht in h aufgeht, wie z. B. für $h < n$

$$F(h\omega) = 0.$$

Die Gleichungen (21) und (22) geben jetzt wegen $F(0) = n$

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(H + K) = \frac{n}{2}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(H - K) = \frac{n}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

oder

$$H = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}$$

und hiermit sind die Summen der Reihen

$$1 + \cos\left(\frac{1^2 2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2^2 2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{\overline{n-1}^2 2\pi}{n}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1^2 2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2^2 2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{\overline{n-1}^2 2\pi}{n}\right)$$

gefunden, wobei man noch für n die Fälle unterscheiden kann, in welchen es unter einer der vier allein möglichen Formen $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ enthalten ist.

Cap. II.

Die Fourier'schen Integrale.

§. 10.

Schon in §. 3 haben wir eine Formel kennen gelernt, mittelst deren sich eine beliebige Funktion einer Variablen in ein bestimmtes Doppelintegral verwandeln liess, welches die Veränderliche der Funktion als arbiträre Constante enthielt. Es ist nicht schwer noch mehrere derartige Beziehungen aufzustellen, indem man sich an das Theorem

$$Lim \int_0^c \frac{\sin kt}{t} F(t)\, dt = \frac{\pi}{2} F(0) \qquad (1)$$

hält, worin das Zeichen „*Lim*" sich auf das unendliche Wachsen von k bezieht. Für diese Ableitung wird es indessen von Vortheil, nicht das obige Theorem unmittelbar, sondern ein etwas allgemeineres in Gebrauch zu nehmen, wonach man den Gränzwerth von

$$\int_a^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\, dt$$

jederzeit leicht bestimmen kann. Ist hier nicht eine der Grössen a oder b der Null gleich, in welchem Falle man auf die Formel (1) zurückkommen würde, so macht sich die Unterscheidung nöthig, ob a und b gleiche Vorzeichen haben oder nicht, indem für diese zwei verschiedenen Fälle auch zwei ganz verschiedene Resultate zum Vorschein kommen.

Bei positiven a und b und $b > a > 0$ braucht man blos zu bemerken, dass

$$\int_a^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\, dt$$

$$= \int_0^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\, dt - \int_0^a \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\, dt$$

ist und hieraus folgt unter Anwendung der Formel (1)

$$Lim \int_a^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt = \frac{\pi}{2} f(x+0) - \frac{\pi}{2} f(x+0) = 0 \quad (2)$$

und das Nämliche gilt auch für negative von Null verschiedene a und b, weil man die Integrationsgränzen durch die Substitution $t = -t'$ sogleich wieder positiv machen, also diesen Fall sogleich auf den eben behandelten zurückführen kann.

Sind dagegen a und b von ungleichen Zeichen, etwa b positiv und a negativ, so schreibe man $-a$ für a und es ist wieder

$$\int_{-a}^{b} \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt - \int_0^{-a} \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt$$

und wenn man im zweiten Integrale für t die neue Variable $-t'$ einführt

$$\int_{-a}^{b} \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt + \int_0^a \frac{\sin kt'}{t'} f(x-t')\,dt'.$$

Die Anwendung des Theoremes (1) giebt hier sogleich

$$Lim \int_{-a}^{b} \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\,dt = \pi \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (3)$$

also $\pi f(x)$, wenn die Funktion $f(x)$ für den Werth von x, den man gerade substituirt, stetig bleibt, dagegen, wenn sie eine Unterbrechung

der Continuität erleidet, das arithmetische Mittel aus den beiden ihr daselbst zukommenden Werthen multiplizirt mit der Ludolph'schen Zahl. Wäre dagegen a positiv und b negativ, so erhellt aus der Substitution $t = -t'$, dass dem absoluten Werthe nach das Nämliche, dem Vorzeichen nach das Entgegengesetzte zum Vorschein kommt.

Diese sehr einfachen Betrachtungen setzen uns in den Stand, die Werthe der doppelten Integrale

$$2\int_0^\infty \cos xu\,du \int_\alpha^\beta f(\vartheta)\cos u\vartheta\,d\vartheta \tag{4}$$

$$2\int_0^\infty \sin xu\,du \int_\alpha^\beta f(\vartheta)\sin u\vartheta\,d\vartheta \tag{5}$$

auf die folgende ungemein leichte Weise zu bestimmen.

I. Gemäss der Bedeutung, welche überhaupt ein Integral mit der Integrationsgränze ∞ hat, ist das Integral in (4) nichts Anderes als die *Limes*, welcher sich das folgende

$$2\int_0^k \cos xu\,du \int_\alpha^\beta f(\vartheta)\cos u\vartheta\,d\vartheta \tag{6}$$

für unendlich wachsende k nähert. Kehren wir darin die Integrationsordnung um, so ist dasselbe auch

$$= \int_\alpha^\beta f(\vartheta)\,d\vartheta \int_0^k 2\cos\vartheta u\cos xu\,du \tag{7}$$

wobei sich die Integration nach u ohne Schwierigkeit bewerkstelligen lässt, wenn man bemerkt, dass

$$\int_0^k 2\cos\vartheta u\cos xu\,du = \int_0^k \left[\cos(\vartheta - x)u + \cos(\vartheta + x)u\right] du$$

$$= \frac{\sin(\vartheta - x)k}{\vartheta - x} + \frac{\sin(\vartheta + x)k}{\vartheta + x}$$

ist. Das Doppelintegral (7) oder (6) zerfällt demnach in die beiden einfachen:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)\, d\vartheta\, \frac{\sin k(\vartheta - x)}{\vartheta - x} + \int_{\alpha}^{\beta} f(\vartheta)\, d\vartheta\, \frac{\sin k(\vartheta + x)}{\vartheta + x}$$

wobei wir im ersten $\vartheta - x = t$ und im zweiten $\vartheta + x = t$ setzen wollen, woraus immer $d\vartheta = dt$ folgt. Die vorstehenden Integrale werden durch diese zwei Substitutionen in die beiden nachstehenden verwandelt:

$$\int_{\alpha - x}^{\beta - x} \frac{\sin kt}{t} f(x + t)\, dt + \int_{\alpha + x}^{\beta + x} \frac{\sin kt}{t} f(-x + t)\, dt \qquad (8)$$

und diese Summe wäre der Werth von Nr. (6). Gehen wir jetzt zur Gränze für unendlich wachsende k über, so erhalten wir den Werth des Integrales in Nr. (4). Hierzu sind indessen einige Unterscheidungen nöthig. Setzen wir nämlich α, β, x als positive Grössen, $\beta > \alpha > 0$ voraus, so kann $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$ aber $< \beta$, $x = \beta$ und $x > \beta$ sein. In allen diesen Fällen convergirt das zweite Integral in Nr. (8) gegen die *Limes* Null, weil den gemachten Voraussetzungen nach $\alpha + x$ und $\beta + x$ positive von Null verschiedene Grössen sind. Im ersten Integrale fallen für $x < \alpha$ beide Integrationsgränzen positiv aus und folglich ist die betreffende *Limes* $= 0$; für $x = \alpha$ geht die untere Integrationsgränze $x - \alpha$ in Null über, folglich die Formel (1) anwendbar, welche $\frac{\pi}{2} f(\alpha + 0)$ giebt. Liegt x zwischen α und β, so ist die untere Integrationsgränze negativ, die obere positiv und durch Anwendung des Theoremes (3) ergiebt $\frac{\pi}{2}\left[f(x - 0) + f(x + 0)\right]$. Für $x = \beta$ wird $\beta - x = 0$ und wenn man $t = -t'$ setzt, so kann man nachher wieder die Formel (I) benutzen, woraus sich $\frac{\pi}{2} f(\beta - 0)$ findet. Wenn endlich $x > \beta$ ist, so werden beide Integrationsgränzen gleichzeitig negativ und folglich verschwindet das zweite Integral nach Formel (2). — Erinnern wir uns nun, dass diese Resultate die jedesmaligen Werthe des Doppelintegrales (4) darstellen, dividiren jetzt mit π und schreiben in (4) t für ϑ, so gelangen wir zu folgendem Theoreme:

Unter der Voraussetzung, dass $\beta > \alpha > 0$ und x eine positive Grösse ist, hat das Doppelintegral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu \, du \int_\alpha^\beta f(t) \cos ut \, dt \qquad (9)$$

den Werth $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ oder Null, je nachdem x innerhalb oder ausserhalb des Intervalles α bis β liegt; an den Gränzen desselben also für $x=\alpha$ oder $x=\beta$ gelten dagegen die Werthe $\frac{1}{2}f(\alpha+0)$ und $\frac{1}{2}f(\beta-0)$. Für negative x finden diese Beziehungen nur dann statt, wenn zufällig $f(-x)=f(x)$ ist.

Eine kleine Modifikation tritt noch für den Fall $\alpha=0$ ein, welchen die Voraussetzungen dieses Theoremes ausschliessen. Bis zur Gleichung (8) bleibt die Betrachtung die nämliche und auch hier ändert sich für $x>0$ noch nichts. Für $x=0$ dagegen verschwindet das zweite Integral daselbst nicht (wie bei $\alpha>0$), sondern man erhält

$$2 \int_0^\beta \frac{\sin kt}{t} f(t) \, dt$$

wovon der Gränzwerth $\pi f(0)$ ist, während er nur $\frac{\pi}{2} f(0)$ sein würde, wenn die vorherige Betrachtung für $\alpha=0$ ungestört bliebe. Diess giebt folgendes Theorem:

Der Werth des doppelten Integrales

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu \int_0^\beta f(t) \cos ut \, dt \qquad (10)$$

ist $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ für jedes x, welches die Bedingung $\beta > x \geqq 0$ erfüllt; dagegen $\frac{1}{2}f(\beta)$ für $x=\beta$ und Null, wenn x die Grösse β übersteigt.

Lässt man β ins Unendliche wachsen, so gilt die Gleichung

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty f(t)\cos ut\, dt \quad (11)$$

für jedes endliche positive x inclusive $x=0$; sie bleibt aber auch für unendlich wachsende β richtig, wenn die Grössen $\frac{1}{2}[f(\beta+0)+f(\beta-0)]$ und $\frac{1}{2}f(\beta)$ sich einer und der nämlichen Gränze nähern, wozu nöthig ist, dass $Lim\, f(\beta)=0$ sei.

II. Ganz die nämlichen Betrachtungen sind auf das Integral in (5) anwendbar, wenn man dasselbe als den Gränzwerth von

$$2\int_0^k \sin xu\, du \int_\alpha^\beta f(\vartheta)\sin u\vartheta\, d\vartheta$$

für unausgesetzt zunehmende k ansieht. Beachtet man, dass nach Umkehrung der Integrationsordnung ein doppeltes Sinusprodukt, d. h. eine Cosinusdifferenz zu integriren ist, während früher eine Cosinussumme vorkam, so übersieht man ohne alle Rechnung, dass das obige Integral entsprechend der Formel (8) in folgende Differenz

$$\int_{\alpha-x}^{\beta-x} \frac{\sin kt}{t} f(x+t)\, dt \;-\; \int_{\alpha+x}^{\beta+x} \frac{\sin kt}{t} f(-x+t)\, dt \qquad (12)$$

zerfällt. Da nun für $\beta>\alpha>0$ und positive x das zweite Integral gegen die Gränze Null convergirt, wenn k ins Unendliche wächst, so fällt die jetzige Untersuchung ganz mit der früheren zusammen und giebt das ganz analoge Theorem:

Unter der Voraussetzung, dass $\beta>\alpha>0$ und x eine positive Grösse ist, hat das Doppelintegral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\, du \int_\alpha^\beta f(t)\sin ut\, dt \qquad (13)$$

den Werth $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ oder Null, je nachdem x innerhalb oder ausserhalb des Intervalles α bis β liegt; an den Gränzen

desselben, also für $x = \alpha$ oder $x = \beta$ gelten dagegen die Werthe $\frac{1}{2}f(\alpha+0)$ und $\frac{1}{2}f(\beta-0)$. Für negative x finden diese Beziehungen nur dann statt, wenn zufällig $f(-x) = -f(x)$ ist.

Auch hier bedarf der Fall $\alpha = 0$ einer besonderen Untersuchung. Für $x > 0$ ändert sich dann in Nr. (12) nichts, für $x = 0$ dagegen reduzirt sich der dort vorkommende Ausdruck auf Null, wie sich auch sonst von selbst versteht. Wir haben daher den Satz:

Der Werth des doppelten Integrales

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^\beta f(t)\sin ut\,dt \tag{14}$$

ist $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ für jedes x zwischen 0 und β; für $x = \beta$ erhält man $\frac{1}{2}f(\beta-0)$ und für $x = 0$ und $x > \beta$ jedesmal Null für denselben.

Lässt man noch β ins Unendliche zunehmen, so gilt die Formel

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt \tag{15}$$

für jedes endliche positive x exclusive $x = 0$; sie bleibt auch noch für unendlich wachsende x richtig, wenn in diesem Falle $Lim\, f(\beta) = 0$ ist.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so ist für $Lim\, f(x) = 0$, wo sich das *Limes*-Zeichen auf das unendliche Wachsen von x bezieht,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\,du \int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt\,, \quad x \geqq 0\,, \tag{16}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt\,, \quad x > 0\,, \tag{17}$$

wobei man nur zu merken hat, dass, wenn für irgend ein x eine Unterbrechung der Continuität in $f(x)$ eintritt, an die Stelle von $f(x)$ das arithmetische Mittel aus den beiden Werthen zu setzen ist, welche in diesem Falle dem $f(x)$ zukommen.

§. 11.

Die beiden Theoreme, welche wir so eben kennen gelernt haben, können noch in anderer Form dargestellt und auch so ausgedehnt werden, dass sie nicht nur für positive x, sondern ganz allgemein von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ gültig bleiben.

Zunächst kann man bemerken, dass

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos xu\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt\,, \quad x \gtrless 0 \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin xu\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut\, dt\,, \quad x > 0 \tag{2}$$

ist; denn denkt man sich jedes von $u = -\infty$ bis $u = +\infty$ gehende Integral in zwei Integrale zerlegt, von denen das erste das Intervall $u = -\infty$ bis $u = 0$ und das zweite das Intervall $u = 0$ bis $u = +\infty$ umfasst, so übersieht man leicht, dass das erste dem zweiten gleich ist, weil jede der Funktionen $\cos xu \cos ut$ und $\sin xu \sin ut$ für negative u die nämlichen Werthe annimmt, wie für positive u.

Setzt man ferner im Integrale (16)

$$f(x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}$$

so gilt die nunmehr entstehende Formel

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos xu\, du \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{2} \cos ut\, dt \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

auch für negative x, weil hier $f(x)$ mit $\cos xu$ die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ gemein hat. Zerlegt man das Integral nach t in die Summe

$$\tfrac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \varphi(t) \cos ut\, dt + \tfrac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \varphi(-t) \cos ut\, dt$$

und nimmt im zweiten Integrale $t = -t'$, so geht letzteres über in

$$-\int_0^{-\infty} \varphi(t') \cos ut'\, dt' = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t') \cos ut'\, dt'.$$

Demnach wird die vorige Summe

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \varphi(t) \cos ut\, dt + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \varphi(t') \cos ut'\, dt'$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos ut\, dt$$

wenn man nämlich zuvörderst die Accente weglässt und dann beide Integrale zusammenzieht. Die Gleichung (3) geht jetzt über in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xu\, du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos ut\, dt \end{aligned}\right\} \infty > x > -\infty. \quad (4)$$

Nimmt man ebenso in der Formel (17) des vorigen Paragraphen

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}$$

so gilt die entstehende Formel sowohl für $x = 0$, als für negative x, weil hier $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ ist; nach einer ebenso leichten Reduktion findet man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin xu\, du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sin ut\, dt \end{aligned}\right\} \infty > x > -\infty. \quad (5)$$

Addirt man endlich die Gleichungen (5) und (6), und be-

merkt, dass die darin vorkommenden Doppelintegrale auch unter den Formen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos ut\ \cos xu\, dt$$

und

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\sin ut\ \sin xu\, dt$$

dargestellt werden können, so ergiebt sich sogleich:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos u(t-x)\, dt\,, \quad \infty > x > -\infty\,, \qquad (6)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos u(t-x)\, dt\,, \quad \infty > x > -\infty\,, \qquad (7)$$

weil $\cos u(t-x)$ für negative u die nämlichen Werthe giebt, wie für positive u.

Bezeichnet man $\sqrt{-1}$ zur Abkürzung mit i, so ist ferner:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{u(t-x)i}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\cos u(t-x)\, dt$$

$$+ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\sin u(t-x)\, dt\,.$$

Da $\sin u(t-x)$ für negative u sein Vorzeichen, aber nicht seinen Werth ändert, so erhellt leicht, dass sich das mit i multiplizirte Integral von selbst annullirt, dass folglich übrig bleibt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{u(t-x)i}\, dt\,, \quad \infty > x > -\infty\,, \qquad (8)$$

indem der Werth des reellen Bestandtheiles nach Formel (7) bestimmt werden kann.

Die hier entwickelten Formeln sind mit denen identisch, welche zuerst Fourier in seiner *théorie de la chaleur* auf anderem Wege abgeleitet hat. — Bei der Wichtigkeit der beiden Sätze Fourier's wird man vielleicht einen zweiten Beweis derselben nicht ungern sehen, welcher den besonderen Vortheil hat, von jeglicher anderweiten Theorie unabhängig zu sein und nur die Kenntniss des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

voraus zu setzen, woraus man, wie schon früher in der Gammafunktionentheorie, den Satz

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos bu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{für} \quad a > b$$

$$= 0\,, \quad \text{für} \quad a < b$$

ableitet. — Man betrachte nämlich zuvörderst das Integral

$$P = \int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma u}{u}\, du \int_0^{c} F(t) \sin ut\, dt$$

worin wir $F(t)$ als stetig und endlich innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = c$ voraussetzen. Durch Umkehrung der Integrationsfolge, die hier gestattet ist, weil der Ausdruck

$$\frac{\cos \gamma u}{u} F(t) \sin ut$$

innerhalb der Gränzen $u = 0$, $u = \infty$ und $t = 0$, $t = c$ weder unendlich, noch diskontinuirlich wird, nimmt P die Form

$$P = \int_0^{c} F(t)\, dt \int_0^{\infty} \frac{\sin tu \cos \gamma u}{u}\, du$$

an, in welcher zwei Fälle zu unterscheiden sind, nämlich $\gamma > c$ und $\gamma < c$. Im ersteren ist zugleich $\gamma > t$, weil vermöge der Integrationsgränzen nach t immer $c > t$ sein muss, und folglich annullirt sich das Integral nach u wegen $a = t < b = \gamma$, also

$$P = 0, \quad \text{für } \gamma > c.$$

Wenn dagegen $\gamma < c$ ist, so zerlege man das Integral P wie folgt

$$P = \int_0^{\gamma} F(t)\,dt \int_0^{\infty} \frac{\sin tu \cos \gamma u}{u}\,du$$

$$+ \int_{\gamma}^{c} F(t)\,dt \int_0^{\infty} \frac{\sin tu \cos \gamma u}{u}\,du.$$

Im ersten Integrale ist nun wegen der Integrationsgränzen für t immer $t < \gamma$ und deshalb verschwindet das Integral in Bezug auf u; im zweiten Integrale ist $c > t > \gamma$ und wegen $t > \gamma$ erhält das in Bezug auf u genommene Integral den Werth $\frac{\pi}{2}$ und es bleibt

$$P = \int_{\gamma}^{c} F(t)\,dt \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{für } \gamma < c.$$

Vermöge des ursprünglichen Werthes von P ist demnach:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \gamma u}{u}\,du \int_0^{c} F(t) \sin ut\,dt = \frac{\pi}{2} \int_{\gamma}^{c} F(t)\,dt, \quad \gamma < c$$

$$= 0 \qquad\qquad , \quad \gamma > c.$$

Setzen wir nun $\int F(t)\,dt = f(t)$ also $F(t) = f'(t)$, so wird durch theilweise Integration

$$\int f'(t) \sin ut\,dt = \sin ut \int f'(t)\,dt - \int u \cos ut\,dt \int f'(t)\,dt$$

$$= f(t) \sin ut - u \int f(t) \cos ut\,dt$$

und die obige Gleichung geht über in

$$\int_0^\infty \frac{\cos \gamma u}{u} du \left[f(c) \sin uc - u \int_0^c f(t) \cos ut \, dt \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[f(c) - f(\gamma) \right] \text{ oder } = 0$$

d. i.

$$f(c) \int_0^\infty \frac{\sin cu \cos \gamma u}{u} du - \int_0^\infty \cos \gamma u \, du \int_0^c f(t) \cos ut \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[f(c) - f(\gamma) \right] \text{ oder } = 0$$

je nachdem $\gamma < c$ oder $\gamma > c$ ist. Im ersten Falle, $c > \gamma$, erhält $f(c)$ auf der linken Seite den Faktor $\frac{\pi}{2}$, im zweiten, $c < \gamma$, den Faktor Null und mithin bleibt

$$\int_0^\infty \cos \gamma u \, du \int_0^c f(t) \cos ut \, dt = \frac{\pi}{2} f(\gamma), \text{ für } \gamma < c$$

$$= 0 \quad , \text{ für } \gamma > c$$

wie wir vorhin schon gefunden hatten.

Ebenso leicht gelangt man zum zweiten Theoreme Fourier's indem man von dem Integrale

$$Q = \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u}{u} du \int_0^c F(t) \cos ut \, dt$$

ausgeht. Man hat zunächst

$$Q = \int_0^c F(t) \, dt \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u \cos tu}{u} du$$

und unterscheidet hier wieder die beiden Fälle $\gamma > c$, $\gamma < c$. Im ersten ist wegen $c > t$ auch immer $\gamma > t$, folglich:

Digitized by Google

$$Q = \int_0^c F(t)\,dt \,.\, \frac{\pi}{2}, \quad \gamma > c$$

im zweiten zerlege man Q folgendermassen

$$Q = \int_0^\gamma F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u \cos tu}{u}\,du$$

$$+ \int_\gamma^c F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u \cos tu}{u}\,du$$

so ist hinsichtlich des ersten Integrales $\gamma > t$ und für das zweite $\gamma < t$; folglich verschwindet das letztere Integral und es bleibt

$$Q = \int_0^\gamma F(t)\,dt \,.\, \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man wieder $F(t) = f'(t)$, so verwandelt sich die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin \gamma u}{u}\,du \int_0^c F(t) \cos ut\,dt = \frac{\pi}{2} \int_0^c F(t)\,dt, \quad \gamma > c$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\gamma F(t)\,dt, \quad \gamma < c$$

in die folgende

$$f(c) \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u \cos cu}{u}\,du - f(0) \int_0^\infty \frac{\sin \gamma u}{u}\,du$$

$$+ \int_0^\infty \sin \gamma u\,du \int_0^c f(t) \sin ut\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[f(c) - f(0)\right] \text{ für } \gamma > c$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[f(\gamma) - f(0)\right] \text{ für } \gamma < c.$$

Die Werthe der beiden ersten Integrale auf der linken Seite [der

Coeffizienten von $f(c)$ und $f(0)$] lassen sich aber in jedem der beiden Fälle $\gamma < c$ oder $\gamma > c$ leicht angeben und man findet so

$$\int_0^\infty \sin \gamma u \, du \int_0^c f(t) \sin ut \, dt = \frac{\pi}{2} f(\gamma), \quad \gamma < c$$

$$= 0 \qquad , \quad \gamma < c$$

ganz wie früher. Ebenso leicht würde es sein, die allgemeineren Theoreme des §. 10 auf diese Weise abzuleiten und sie auf solche Funktionen $f(t)$ auszudehnen, welche innerhalb des Intervalles $t = 0$ bis $t = c$ eine Unterbrechung der Continuität erleiden, ohne jedoch gleichzeitig unendlich zu werden.

§. 12.

Es ist ein doppelter Gebrauch, welcher sich von den Theoremen des vorigen Paragraphen machen lässt; einerseits kann man sie nämlich bei der Auflösung partieller Differenzialgleichungen benutzen, um aus einem partikulären Integrale einer solchen Gleichung das allgemeine Integral abzuleiten, andererseits werden jene Formeln für die Theorie bestimmter Integrale von Wichtigkeit, weil sie eine reiche Quelle neuer Integralformeln darstellen.

Von der ersten Art der Anwendung wollen wir, da sie unserem Zwecke ferner liegt, nur ein einziges Beispiel geben und zwar mit Fourier diejenige Differenzialgleichung integriren, welche zur Bestimmung gewisser Wärmebewegungen dient. Wir schreiben in diesem Falle die Formel (7) in folgenden Zeichen:

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} q(\Theta) \cos \omega (\Theta - x) \, d\Theta . \qquad (1)$$

Die gegebene partielle Differenzialgleichung sei

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \qquad (2)$$

und zugleich die Bedingung gestellt, dass das Integral derselben u,

dass eine Funktion der zwei Variablen x und t ist, sich für $t=0$ auf eine gegebene Funktion von x, etwa $\varphi(x)$, reduziren solle. — Zunächst bemerkt man nun leicht, dass der Ausdruck

$$e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(\Theta-x) \tag{3}$$

worin ω und Θ willkührliche Constanten bedeuten, die Gleichung (2) erfüllt, also ein partikuläres Integral derselben ist. Für $t=0$ reduzirt sich derselbe auf $\cos\omega(\Theta-x)$; um nun aber für $t=0$ nicht diesen speziellen Werth, sondern $\varphi(x)$ zu erhalten, brauchen wir blos in Nr. (1) die Operationen nachzusehen, welche noch mit $\cos\omega(\Theta-x)$ vorgenommen werden müssen, um daraus $\varphi(x)$ zu bilden.

Wenden wir ebendieselben Operationen auf die partikuläre Lösung in (3) an, so ist jetzt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Theta)\, e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(\Theta-x)\, d\Theta \tag{4}$$

das verlangte allgemeine Integral. Da nämlich ω und Θ von x und t unabhängig sind, so befriedigt ein Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{2\pi} d\omega \,.\, \varphi(\Theta)\, e^{-a^2\omega^2 t}\cos\omega(\Theta-x)\, d\Theta \tag{5}$$

die gegebene Differenzialgleichung, weil er sich von dem partikulären Integrale in (3) nur durch constante Faktoren unterscheidet. Jenes Doppelintegral ist aber nichts Anderes als die Summe einer unendlichen Menge von Elementen, deren jedes einzelne unter der Form (5) steht, es muss folglich selbst die Gleichung (2) erfüllen, weil jeder seiner Bestandtheile diese Eigenschaft besitzt. Da ausserdem der Ausdruck in (4) sich für $t=0$ auf $\varphi(x)$ reduzirt, so genügt derselbe allen Anforderungen, welche an u gemacht worden sind. Kehrt man in ihm die Reihenfolge der Integrationen um, so ist auch

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Theta)\, d\Theta \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega(\Theta-x)\, e^{-a^2 t\omega^2}\, d\omega$$

und unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2h\omega \, e^{-k^2\omega^2} \, d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{k} e^{-\left(\frac{h}{k}\right)^2}$$

ergiebt sich hieraus

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Theta) \, d\Theta \, e^{-\frac{(\Theta-x)^2}{4a^2 t}} \tag{6}$$

oder wenn man

$$\frac{(\Theta-x)^2}{4a^2 t} = \eta^2, \quad \text{d. i.} \quad \Theta = x + 2a\eta\sqrt{t}$$

setzt, wo η die neue Variable bezeichnet:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} \varphi(x + 2a\eta\sqrt{t}) \, d\eta. \tag{7}$$

Von der Richtigkeit dieser Resultate kann man sich auch leicht a posteriori überzeugen; aus der ersten Form von u in Nr. (6) erkennt man sehr leicht, dass diese Funktion in der That ein Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist, und aus der zweiten, dass sie sich für $t = 0$ auf $\varphi(x)$ reduzirt.

§. 13.

Die zweite Anwendung, welche die Fourier'schen Formeln zulassen, besteht darin, dass sie einen Leitfaden zur Entdeckung bestimmter Integrale mit angebbaren Werthen bilden; wählt man nämlich die willkührliche Funktion $f(x)$ so, dass sich in den Gleichungen

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^{\infty} \cos xu \, du \int_0^{c} f(t) \cos ut \, dt, \quad c > x \geqq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^{\infty} \sin xu \, du \int_0^{c} f(t) \sin ut \, dt, \quad c > x > 0 \tag{2}$$

die jedesmal erste Integration (nach t) durch die gewöhnlichen Mittel in geschlossener Form bewerkstelligen lässt, so bleibt noch eine Integration nach u übrig, die in vielen Fällen nicht direkt ausführbar sein wird; da man aber den Werth der linken Seite im Voraus kennt, so ist man durch diesen einfachen Calcül zur unmittelbaren Werthangabe eines zwischen den Gränzen 0 und ∞ genommenen Integrales gelangt. Aus der so entstandenen Gleichung lassen sich dann durch Integration oder Differenziation nach den in ihr vorkommenden willkührlichen Constanten wieder neue Integralformeln ableiten. Dabei ist jedoch ganz besonders zu bemerken, dass eine derartige Differenziation in Bezug auf x im Allgemeinen nicht, sondern nur unter gewissen besonderen Bedingungen vorgenommen werden darf, wie sich aus der folgenden Untersuchung darüber ergeben wird.

Aus der Differenziation der Gleichung (1) in Bezug auf x ergiebt sich die nachstehende Formel, welche wir vor der Hand als eine noch problematische bezeichnen:

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = -\int_0^\infty u \sin xu\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt. \qquad (3)$$

Andererseits ist vermöge der Gleichung (2), wenn darin $f(x)$ durch $f'(x)$ ersetzt wird

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^c f'(t) \sin ut\, dt \qquad (4)$$

wobei sich die Integration nach t leicht in etwas anderer Form darstellen lässt, sobald man bemerkt, dass

$$\int \sin ut\, f'(t)\, dt = \sin ut \int f'(t)\, dt - u \int \cos ut\, dt \int f'(t)\, dt$$

ist; indem man hier $f(t)$ für $\int f'(t)\, dt$ schreibt und die Gränzen c und 0 einführt ergiebt sich

$$\int_0^c f'(t) \sin ut\, dt = f(c) \sin cu - u \int_0^c f(t) \cos ut\, dt.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung nimmt die Formel (4) folgende Gestalt an:

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = f(c) \int_0^\infty \sin xu \sin cu \, du$$

$$- \int_0^\infty u \sin xu \, du \int_0^c f(t) \cos ut \, dt$$

und wenn wir in dem mit $f(c)$ multiplizirten Integrale die obere Gränze ∞ als *Lim* einer unendlich wachsenden Zahl k ansehen und die daselbst postulirte Integration zwischen k und 0 ausführen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} f'(x) = \tfrac{1}{2} f(c) \, Lim \left\{ \frac{\sin (x-c)k}{x-c} - \frac{\sin (x+c)k}{x+c} \right\} \\ - \int_0^\infty u \sin xu \, du \int_0^c f(t) \cos ut \, dt \, . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Soll nun diese ganz unbezweifelt richtige Gleichung mit der unter Nr. (3) stehenden noch unsicheren Formel zusammenfallen, so muss für unausgesetzt wachsende k

$$f(c) \, Lim \left\{ \frac{\sin k(x-c)}{x-c} - \frac{\sin k(x+c)}{x+c} \right\} = 0$$

sein, eine Bedingung, welche nur dann erfüllt sein kann, wenn

$$f(c) = 0 \quad (6)$$

ist, weil ausserdem der fragliche Ausdruck völlig unbestimmt würde, in so fern die Sinus unendlich wachsender Bögen zwischen $+1$ und -1 hin und her oszilliren, sich also keiner bestimmten Gränze nähern. Die Gleichung (6) giebt also die Bedingung an, unter welcher die Formel (3) richtig, d. h. die Differenziation der Gleichung (1) nach x erlaubt ist.

Eine ganz ähnliche Betrachtung zeigt die Umstände, unter denen die Gleichung (2) in Bezug auf x differenzirt werden darf, wobei

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = \int_0^\infty u \cos xu \, du \int_0^c f(t) \sin ut \, dt \quad (7)$$

herauskommt. Man hat nämlich zufolge der Formel (1)

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^c f'(t) \cos ut\, dt$$

und hieraus folgt durch Anwendung des Prinzipes theilweiser Integration auf das Integral nach t

$$\frac{\pi}{2} f'(x) = \int_0^\infty \cos xu\, du \left[\cos cu\, f(c) - f(0)\right]$$

$$+ \int_0^\infty u \cos xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt .$$

Nimmt man das erste Integral zwischen den Gränzen 0 und k und lässt nachher k ins Unendliche wachsen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} f'(x) = {} & \tfrac{1}{2} f(c)\, Lim \left\{\frac{\sin(x-c)k}{x-c} + \frac{\sin(x+c)k}{x+c}\right\} \\ & - f(0)\, Lim \frac{\sin xk}{x} + \int_0^\infty u \cos xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt . \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Soll diess mit der hypothetischen Gleichung (7) coincidiren, so ist noch die Gleichung

$$0 = \tfrac{1}{2} f(c)\, Lim \left\{\frac{\sin k(x-c)}{x-c} + \frac{\sin k(x+c)}{x+c}\right\}$$

$$- f(0)\, Lim \frac{\sin kx}{x}$$

nöthig, zu deren Bestehen die Bedingungen

$$f(c) = 0 , \quad f(0) = 0 \quad (9)$$

erfordert werden. — Man kann demnach sagen: „von den beiden Formeln (1) und (2) darf man die erste nach x differenziren, sobald $f(t)$ an der oberen Integrationsgränze verschwindet, die zweite aber nur dann, wenn $f(t)$ sich an beiden Integrationsgränzen annullirt."

Statt dieses Kennzeichens a priori kann man auch leicht ein anderes a posteriori aufstellen. Hat nämlich das Integral:

$$-\int_0^\infty u \sin xu\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt \qquad (10)$$

einen bestimmten Werth, so muss offenbar die Bedingung $f(c) = 0$ erfüllt sein, denn wäre sie es nicht, so würde aus Nr. (5) gegen die Voraussetzung folgen, dass der fragliche Werth unbestimmt, nämlich

$$= \frac{\pi}{2} f'(x) - \tfrac{1}{2} f(c)\ Lim \left\{ \frac{\sin(x-c)k}{x-c} - \frac{\sin(x+c)k}{x+c} \right\} \qquad (11)$$

wäre; ist hingegen der Werth des Integrales (10) unbestimmt, etwa wie der von $\int_0^\infty \cos z\, dz$, so braucht jene Bedingung nicht erfüllt zu sein und die Gleichung zwischen (10) und (11) reduzirt sich auf das triviale Resultat, dass ein paar unbestimmte Grössen einander gleich sein können.

Eine ganz ähnliche Betrachtung ist auf das Integral

$$\int_0^\infty u \cos xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt$$

anwendbar und berechtigt uns mit der vorigen zusammen zu dem Ausspruche: „zwischen den nach x genommenen Differenzialquotienten der Ausdrücke

$$\frac{\pi}{2} f(x), \quad \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt, \quad c > x \geqq 0,$$

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt, \quad c > x > 0,$$

findet so lange Gleichheit statt, als die Werthe der durch die Differenziation entspringenden neuen Integrale bestimmte Grössen bleiben."

§. 14.

Eines der einfachsten Beispiele für die Theoreme (1) und (2) des vorigen Paragraphen bildet die Annahme

$$f(x) = e^{-ax}, \quad c = \infty .$$

Erinnert man sich nämlich, dass für positive von Null verschiedene a

$$\int_0^\infty e^{-at} \cos ut \, dt = \frac{a}{a^2+u^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-at} \sin ut \, dt = \frac{u}{a^2+u^2}$$

ist, so ergeben sich auf der Stelle die folgenden beiden Formeln

$$\frac{\pi}{2} e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{a \cos xu}{a^2+u^2} du, \quad x \geqq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\pi}{2} e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2+u^2} du, \quad x > 0 . \tag{2}$$

Man kann dazu noch eine dritte und ähnliche stellen, wenn man bemerkt, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} du - \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2+u^2} du = a^2 \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2+u^2} \frac{du}{u} \tag{3}$$

ist, woraus nun sogleich folgt

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - e^{-ax}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2+u^2} \cdot \frac{a^2}{u} du, \quad x > 0 . \tag{4}$$

Diese letztere Formel darf man als die gemeinschaftliche Quelle der unter (1) und (2) verzeichneten Resultate ansehen, in so fern sich diese aus ihr durch zwei consecutive Differenziationen nach x ableiten lassen. Die Formel (6) darf man jedoch nicht wieder differenziren,

weil die Substitution $f(x) = e^{-ax}$, welche zu ihr führte, den Bedingungen (9) im vorigen Paragraphen nicht genügt; in der That würde das neue Integral

$$\int_0^\infty \frac{u^2 \cos xu}{a^2 + u^2}\, du$$

welches dabei zum Vorschein käme, keinen bestimmten Werth haben, wie man augenblicklich ersieht, wenn man es in der Form

$$\int_0^\infty \cos xu\, du - a^2 \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2 + u^2}\, du$$

darstellt, und daher darf man dasselbe dem Differenzialquotienten von $\frac{\pi}{2} e^{-ax}$ nicht gleich setzen.

Man kann zu den so eben entwickelten Resultaten auch auf einem anderen Wege gelangen. Setzt man nämlich

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 + u^2} \frac{du}{u} \tag{5}$$

so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2 + u^2}\, du \tag{6}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2 + u^2}\, du \tag{7}$$

und diese Differenziationen sind erlaubt, weil die fraglichen drei Integrale bestimmte endliche Werthe haben müssen, wie man leicht durch ein paar einfache Betrachtungen findet. Man hat ferner

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = -\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du = -\frac{\pi}{2}$$

und hierin eine gewöhnliche Differenzialgleichung. Nach den bekannten

Methoden zur Integration der linearen Differenzialgleichungen erhält man als vollständiges Integral derselben

$$y = Ae^{ax} + Be^{-ax} + \frac{\pi}{2a^2}$$

wobei A und B die willkührlichen Constanten der Integration sind, und ferner

$$\frac{dy}{dx} = aAe^{ax} - aBe^{-ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2Ae^{ax} + a^2Be^{-ax}.$$

Da nun aus (5) und (6) folgt, dass für $x = 0$

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2a}$$

wird, so haben wir zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$0 = A + B + \frac{\pi}{2a^2}$$

$$\frac{\pi}{2a} = aA - aB$$

woraus man $A = 0$, $B = -\frac{\pi}{2a^2}$ erhält. Vermöge der Bedeutung von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist nun

$$\frac{\pi}{2a^2}\left(1 - e^{-ax}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2+u^2} \cdot \frac{du}{u} \tag{8}$$

$$\frac{\pi}{2a}e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2+u^2}\,du \tag{9}$$

$$\frac{\pi}{2}e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2+u^2}\,du \tag{10}$$

übereinstimmend mit den früheren Formeln.

Schreibt man b und $\sqrt{r}$ für x und a, bemerkt ferner, dass jetzt

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu}{r+u^2}\,du = \frac{\pi}{2\sqrt{r}}\,e^{-b\sqrt{r}} = -\frac{\pi}{b}\,\frac{d\left(e^{-b\sqrt{r}}\right)}{dr} \qquad (11)$$

ist, so erhellt leicht, dass man sovielmal als es beliebt nach r differenziren und die beiderseitigen Differenzialquotienten einander gleich setzen darf; da nämlich der Nenner der Differenzialformel durch Differenziation nach r immer höhere Potenzen von $r+u^2$ bekommt, so bilden die Werthe der successiv entstehenden Integrale eine abnehmende Reihe und sind mithin kleiner als der in (11) verzeichnete Ausdruck. Man hat nun bei $n$maliger Differenziation

$$(-1)^n\,1.2\,..\,n\int_0^\infty \frac{\cos bu\,du}{(r+u^2)^{n+1}} = -\frac{\pi}{b}\,\frac{d^{n+1}\left(e^{-b\sqrt{r}}\right)}{dr^{n+1}}. \qquad (12)$$

Wendet man, um die rechte Seite zu entwickeln, die bekannte Formel

$$\frac{d^n f(\sqrt{x})}{dx^n} = \frac{1}{2^n}\left\{\frac{f^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}} + \frac{(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)}{2.4}\cdot\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}} - \ldots\right\}$$

für $x=r$, $f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{r}) = e^{-b\sqrt{r}}$ an, so dass $f(z) = e^{-bz}$ ist, so findet man

$$\frac{d^n\left(e^{-b\sqrt{r}}\right)}{dr^n}$$

$$= \left(\frac{-b}{2\sqrt{r}}\right)^n\left\{1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{b\sqrt{r}} + \frac{(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)}{2.4}\cdot\left(\frac{1}{b\sqrt{r}}\right)^2 + \ldots\right\}e^{-b\sqrt{r}}.$$

Schreibt man $n+1$ für n, substituirt diess in die Gleichung (12), dividirt dann beiderseits mit $1.2 \ldots n$, was kurz mit n' bezeichnet werden möge, und setzt am Ende wieder a^2 für r, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{(a^2+u^2)^{n+1}} \tag{13}$$

$$= \frac{\pi e^{-ab}}{2a \cdot n'} \left(\frac{b}{2a}\right)^n \left\{1 + \frac{(n+1)n}{2} \frac{1}{ab} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4} \frac{1}{(ab)^2} + \ldots\right\}.$$

Gleiche Behandlung der Formel (10) liefert das analoge Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu\, du}{(a^2+u^2)^{n+1}} \tag{14}$$

$$= \frac{\pi e^{-ab}}{2 \cdot n'} \left(\frac{b}{a}\right)^n \left\{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{ab} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4} \frac{1}{(ab)^2} + \ldots\right\}.$$

Diese Formeln stehen übrigens in einer sehr nahen Beziehung zu derjenigen, welche den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty x^{n-\frac{1}{2}} e^{-\left(a^2 x + \frac{e^2}{x}\right)} dx$$

angiebt und in §. 17 Abth. I entwickelt worden ist. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{k^{\mu+1}} = \int_0^\infty x^\mu e^{-kx} dx$$

$k = a^2 + u^2$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{(a^2+u^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty x^\mu e^{-(a^2+u^2)x}\, dx$$

und durch Multiplikation mit $\cos 2cu\, du$ und Integration zwischen $u = 0$ und $u = \infty$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2cu\, du}{(a^2+u^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty \cos 2cu\, du \int_0^\infty x^\mu e^{-(a^2+u^2)x}\, dx\,.$$

Durch Umkehrung der Integrationsfolge geht das Doppelintegral über in:

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-a^2 x}\, dx \int_0^\infty e^{-xu^2} \cos 2cu\, du$$

$$= \int_0^\infty x^\mu e^{-a^2 x}\, dx \, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\, e^{-\frac{c^2}{x}}$$

und so wird jetzt nach dem Vorigen

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2cu\, du}{(a^2+u^2)^{\mu+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty x^{\mu-\frac{1}{2}} e^{\left(a^2 x + \frac{c^2}{x}\right)}\, dx \qquad (15)$$

woraus sich die bisherigen Formeln leicht ableiten lassen würden, indem man das Integral rechts für den Fall eines ganzen positiven μ entwickelt. Diesen Weg ist (für $\mu = 0$) zuerst Laplace gegangen *).

---

*) *Bulletin de la société philomatique Avril* 1811; oder *Théorie analytique des probabilités, trois. édit. page* 98.

§. 15.

Eine nicht minder bemerkenswerthe Anwendung der Theoreme

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^c f(t) \cos ut\, dt\,, \quad c > x \geqq 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^c f(t) \sin ut\, dt\,, \quad c > x > 0, \qquad (2)$$

geht aus folgenden Substitutionen hervor.

In Formel (1) sei $f(x) = \sin ax$, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\int_0^c \sin at \cos ut\, dt = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos(a+u)c}{a+u} + \frac{\cos(a-u)c}{a-u}\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{a+u} + \frac{1}{a-u}\right\}$$

und mithin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \sin ax = &-\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos c(a+u)}{a+u} \cos xu\, du \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos c(u-a)}{u-a} \cos xu\, du \\ &+ \int_0^\infty \frac{a \cos xu}{a^2-u^2} du\,, \quad c > x \geqq 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Hier tritt der bemerkenswerthe Umstand ein, dass für $x < c$ die Summe der beiden ersten Integrale der Null gleich ist. Man sieht diess leicht auf folgende Weise ein. Im ersten Integrale sei $a+u=t$, im zweiten $u-a=t$, so geht jene Summe in

$$-\int_a^\infty \frac{\cos ct}{t} \cos x(t-a)\, dt + \int_{-a}^\infty \frac{\cos ct}{t} \cos x(t+a)\, dt$$

über; dabei zerlegen wir das zweite Integral in zwei andere von $-a$ bis $+a$ und von $+a$ bis ∞, wo sich das letztere mit dem ersten der obigen Integrale vereinigen lässt; diess giebt

$$-2\sin ax \int_a^\infty \frac{\cos ct}{t} \sin xt\, dt + \int_{-a}^{+a} \frac{\cos ct}{t} \cos x(t+a)\, dt . \qquad (4)$$

Hier ist das zwischen $-a$ und $+a$ genommene Integral wieder in zwei andere von $-a$ bis 0 und von 0 bis $+a$ zerlegbar; setzt man nachher im ersten derselben $t = -t'$, so wird

$$\int_{-a}^{a} \frac{\cos ct}{t} \cos x(t+a)\, dt$$

$$= -\int_0^a \frac{\cos ct'}{t'} \cos(-t'+a)\, dt' + \int_0^a \frac{\cos ct}{t} \cos x(t+a)\, dt$$

d. i. wenn man die Accente weglässt und zusammenzieht

$$= -2\sin ax \int_0^a \frac{\cos ct}{t} \sin xt\, dt .$$

Denken wir uns diess an die Stelle des zweiten Integrales in (4) gesetzt, so geht der ganze daselbst befindliche Ausdruck in

$$-2\sin ax \int_0^\infty \frac{\cos ct}{t} \sin xt\, dt$$

über, wobei unter der Voraussetzung $c > x$

$$2\int_0^\infty \frac{\cos ct}{t} \sin xt\, dt = \int_0^\infty \frac{\sin(c+x)t}{t}\, dt - \int_0^\infty \frac{\sin(c-x)t}{t}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

ist. Aus der Gleichung (3) folgt jetzt, wenn wir c ins Unendliche wachsen lassen, wo es dann grösser als jedes endliche x ist,

$$\frac{\pi}{2} \sin ax = \int_0^\infty \frac{a \cos xu}{a^2 - u^2} du, \quad x \gtrless 0. \tag{5}$$

Zu ganz ähnlichen Betrachtungen führt die Substitution $f(x) = \cos ax$ in die Formel (2); man findet nämlich

$$\frac{\pi}{2} \cos ax = - \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2 - u^2} du, \quad x > 0. \tag{6}$$

Berücksichtigt man noch die identische Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} du + \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2 - u^2} du = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 - u^2} \frac{a^2}{u} du$$

so ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2} (1 - \cos ax) = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 - u^2} \cdot \frac{a^2}{u} du, \quad x \gtrless 0, \tag{7}$$

woraus man durch zwei consekutive Differenziationen nach x die vorhergehenden Formeln wieder ableitet.

Man kann ebenso, wie im vorigen Paragraphen, auch auf anderem Wege zu diesen Resultaten gelangen. Für

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 - u^2} \frac{du}{u} \tag{8}$$

wird nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2 - u^2} du \tag{9}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2 - u^2} du. \tag{10}$$

Man hat nun weiter

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

und von dieser Differenzialgleichung ist

$$y = A \sin ax + B \cos ax + \frac{\pi}{2a^2}$$

das vollständige Integral, woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = aA \cos ax - Ba \sin ax$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 A \sin ax - a^2 B \cos ax .$$

Für $x = 0$ muss aber nach (8) und (9) sein

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \int_0^\infty \frac{du}{a^2 - u^2} = 0$$

und folglich haben wir zur Bestimmung der beiden Integrationsconstanten A und B die Gleichungen

$$0 = B + \frac{\pi}{2a^2}, \quad 0 = aA$$

was $A = 0$ und $B = -\frac{\pi}{2a^2}$ giebt. Vermöge der so bestimmten Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ haben wir nun nach (8), (9) und (10)

$$\frac{\pi}{2a^2}(1 - \cos ax) = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{a^2 - u^2} \cdot \frac{du}{u} \tag{11}$$

$$\frac{\pi}{2a} \sin ax = \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2 - u^2}\, du \tag{12}$$

$$-\frac{\pi}{2} \cos ax = \int_0^\infty \frac{u \sin xu}{a^2 + u^2}\, du \tag{13}$$

was mit dem Früheren zusammenfällt. Uebrigens darf man die Diffe-

renziationen nach x nicht weiter treiben, weil die neuen Integrale, welche entspringen würden, keine bestimmten Werthe mehr haben, wie z. B.

$$\int_0^\infty \frac{u^2 \cos xu}{a^2 - u^2} = -\int_0^\infty \cos xu\, du + a^2 \int_0^\infty \frac{\cos xu}{a^2 - u^2} du.$$

Dagegen ist es erlaubt sovielmal als man will nach a^2 zu differenziren, was man auf die Weise ausführt, dass man $\sqrt{r}$ für a setzt, darauf $n$mal nach r differenzirt und zuletzt wieder a^2 für r schreibt. Man gelangt auf diese Weise zu Formeln, welche denen in Nr. (13) und (14) des vorigen Paragraphen völlig analog sind.

§. 16.

Die in den beiden letzten Paragraphen entwickelten Formeln sind durch die Aufmerksamkeit, welche man ihnen geschenkt hat, eine reiche Quelle fernerer zur Theorie bestimmter Integrale gehörender Beziehungen geworden, von denen wir die wichtigsten, theils neue, theils bekannte, entwickeln wollen.

So ist es zunächst sehr bemerkenswerth, dass eine ganz simple Transformation hinreicht, um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p + qz}{a^2 - 2\beta z + z^2} \cos rz\, dz \qquad (1)$$

auf jene Integrale zu reduziren und aus demselben den Werth von

$$\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{a^n \pm u^n} \cos bu\, du$$

abzuleiten, worin m und n positive ganze Zahlen bedeuten. Unter der Voraussetzung nämlich, dass $a^2 > \beta^2$, also der Nenner $a^2 - 2\beta z + z^2$ nicht in zwei reelle Faktoren des ersten Grades zerlegbar ist, können wir

$$z = \beta + x\sqrt{a^2 - \beta^2}$$

in das unter (1) stehende Integral substituiren, wodurch sich die Integrationsgränzen nicht ändern und

$$dz = \sqrt{a^2 - \beta^2}\, dx$$

$$a^2 - 2\beta z + z^2 = (a^2 - \beta^2)(1 + x^2)$$

wird. Das in Rede stehende Integral nimmt dann die Form

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-\beta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p + q\beta + qx\sqrt{a^2-\beta^2}}{1+x^2} \cos r(\beta + x\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx$$

an, worin wir zur Abkürzung

$$\frac{p + q\beta}{\sqrt{a^2-\beta^2}} = p' \tag{2}$$

setzen und den Cosinus der zweitheiligen Grösse zerlegen. Das Integral wird dann zur folgenden Differenz

$$\cos r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p' + qx}{1+x^2} \cos(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx$$

$$- \sin r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p' + qx}{1+x^2} \sin(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx .$$

Diese zwei Integrale zerfallen wieder in vier andere, wenn man die unter den Integralzeichen angedeuteten Multiplikationen ausführt, nämlich:

$$p' \cos r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cos(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx$$

$$+ q \cos r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \cos(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx$$

$$- p' \sin r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \sin(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx$$

$$- q \sin r\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin(rx\sqrt{a^2-\beta^2})\, dx .$$

Von diesen Integralen verschwinden das zweite und dritte, weil sie aus gegenseitig sich aufhebenden Elementen bestehen, in so fern nämlich der jedesmalige Faktor von dx die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ besitzt. Es bleiben also nur das erste und letzte Integral übrig, für die man auch

$$2p' \cos r\beta \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \cos\left(rx\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right) dx$$

$$- 2q \sin r\beta \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \sin\left(rx\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right) dx$$

schreiben kann, wenn man berücksichtigt, dass der jedesmalige Faktor von dx für negative x die nämlichen Werthe, wie für positive x giebt. Da nun die vorstehenden Integrationen mittelst der Formel

$$\int_0^\infty \frac{\cos \gamma x}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{x \sin \gamma x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\gamma}$$

für $\gamma = r\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ ausgeführt werden können, so ergiebt sich, wenn wir den Ausgangspunkt (1) im Auge behalten,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p+qz}{\alpha^2-2\beta z+z^2} \cos rz\, dz \\ &= \pi\left[p' \cos r\beta - q \sin r\beta\right] e^{-r\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Eine elegante Spezialisirung dieser sehr bemerkenswerthen Formel ist

$$\alpha = 1, \quad \beta = \cos\omega, \quad p = \cos(m-1)\omega, \quad q = -\cos m\omega$$

wo m und ω noch ganz beliebig sind. Es wird dann

$$p' = \sin m\omega, \quad \sqrt{\alpha^2-\beta^2} = \sin\omega$$

und

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(m-1)\omega - z\cos m\omega}{1-2z\cos\omega+z^2} \cos rz\, dz \\ &= \pi e^{-r\sin\omega} \sin(m\omega + r\cos\omega). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Hieraus lassen sich durch Spezialisirung von ω und m mancherlei zum Theil schon bekannte Resultate ableiten; man erhält z. B. für $\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos rz}{1-z}\,dz = \pi \sin r$$

was nichts weiter als eine etwas andere Form für

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2\cos rz}{1-z^2}\,dz = \pi \sin r$$

ist. Wichtiger dagegen sind die folgenden Anwendungen.

I. Für ein gerades n und positives ganzes $m < n+1$ ist bekanntlich, wenn ϑ zur Abkürzung für $\frac{\pi}{n}$ dient *),

$$\frac{n}{2}\,\frac{z^{m-1}}{1+z^n}$$

$$= \frac{\cos(m-1)\vartheta - z\cos m\vartheta}{1-2z\cos\vartheta+z^2} + \frac{\cos 3(m-1)\vartheta - z\cos 3m\vartheta}{1-2z\cos 3\vartheta+z^2} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{\cos(n-1)(m-1)\vartheta - z\cos(n-1)m\vartheta}{1-2z\cos(n-1)\vartheta+z^2}.$$

Nach beiderseitiger Multiplikation mit $\cos rz\,dz$ kann man rechts sämmtliche Glieder integriren, wenn man in der Formel (4) sich für ω der Reihe nach ϑ, 3ϑ, 5ϑ, ... $\overline{n-1}\,\vartheta$ geschrieben denkt. Es ergiebt sich so:

---

*) Es ist diess die nämliche Zerlegung, welche in den Elementen der Integralrechnung zur Entwickelung des unbestimmten Integrales $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n}$ benutzt wird.

$$\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\cos rz\,dz$$

$$= \pi\left\{e^{-r\sin\vartheta}\sin(m\vartheta + r\cos\vartheta) + e^{-r\sin 3\vartheta}\sin(3m\vartheta + r\cos 3\vartheta) + ..\right.$$

$$\left.. + e^{-r\sin\overline{n-1}\,\vartheta}\sin(\overline{n-1}\,m\vartheta + r\cos\overline{n-1}\,\vartheta)\right\}.$$

Denkt man sich ferner das Integral auf der linken Seite in zwei andere von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis ∞ zerlegt, so ist klar, dass, wenn m gerade, also $m-1$ ungerade ist, sich diese beiden Integrale aufheben, dass sie dagegen für ungerade m, also gerade $m-1$, sowohl dem Zeichen als dem Werthe nach einander gleich sind; im letzteren Falle kann man daher statt der linken Seite in der obigen Gleichung auch

$$n\int_{0}^{\infty}\frac{z^{m-1}}{1+z^n}\cos rz\,dz$$

schreiben. Setzt man endlich noch $r = ab$, $z = \frac{x}{a}$, so erhält man leicht für ungerade m und gerade $n > m-1$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{a^n+x^n}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{\pi}{na^{n-m}}\left\{e^{-ab\sin\vartheta}\sin(m\vartheta + ab\cos\vartheta)\right.$$

$$+ e^{-ab\sin 3\vartheta}\sin(3m\vartheta + ab\cos 3\vartheta) + ...$$

$$\left.... + e^{-ab\sin\overline{n-1}\,\vartheta}\sin(\overline{n-1}\,m\vartheta + ab\cos\overline{n-1}\,\vartheta)\right\} \qquad (5)$$

wobei immer $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ ist.

Nimmt man beispielsweis $m=3$, $n=4$, so ergiebt sich nach einer kleinen goniometrischen Reduktion

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{a^4+x^4}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}e^{-ab:\sqrt{2}}\left[\cos\frac{ab}{\sqrt{2}} - \sin\frac{ab}{\sqrt{2}}\right]$$

oder $a\sqrt{2}$ für a gesetzt

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{4a^4+x^4}\cos bx\,dx = \frac{\pi}{4a}e^{-ab}\left[\cos ab - \sin ab\right].$$

Differenzirt man die Gleichung (5) partiell nach b, so kann man aus ihr auch leicht den Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{a^n+x^n}\sin bx\,dx$$

ableiten.

II. Unter den nämlichen Voraussetzungen hinsichtlich der Zahlen m und n ist auch

$$\frac{n}{2}\frac{z^{m-1}}{1-z^n}$$

$$= \frac{1}{1-z^2} + \frac{\cos 2(m-1)\vartheta - z\cos 2m\vartheta}{1-2z\cos 2\vartheta+z^2} + \frac{\cos 4(m-1)\vartheta - z\cos 4m\vartheta}{1-2z\cos 4\vartheta+z^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\cos(n-2)(m-1)\vartheta - z\cos(n-2)m\vartheta}{1-2z\cos(n-2)\vartheta+z^2}.$$

Multiplizirt man diess mit $\cos rz\,dz$, integrirt zwischen den Gränzen $z=-\infty$, $z=+\infty$ und bemerkt für das erste Glied rechts, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos rz}{1-z^2}dz = 2\int_0^\infty \frac{\cos rz}{1-z^2}dz = \pi\sin r$$

ist, während man zur Verwerthung der übrigen Integrale die Formel (4) für $\omega = 2\vartheta, 4\vartheta, 6\vartheta, \ldots \overline{n-2}\,\vartheta$ in Anwendung bringt, so ergiebt sich

$$\frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{m-1}}{1-z^n}\cos rz\,dz$$

$$= \pi\left[\sin r + e^{-r\sin 2\vartheta}\sin(2m\vartheta + r\cos 2\vartheta)\right.$$

$$+ e^{-r\sin 4\vartheta}\sin(4m\vartheta + r\cos 4\vartheta) + \ldots$$

$$\left.\ldots + e^{-r\sin\overline{n-2}\,\vartheta}\sin(\overline{n-2}\,m\vartheta + r\cos\overline{n-2}\,\vartheta)\right]$$

oder wenn man $r = ab$, $z = \frac{x}{a}$ und m als ungerade voraussetzt

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{a^n - x^n}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{\pi}{n a^{n-m}}\left[\sin ab + e^{-ab\sin 2\vartheta}\sin(2m\vartheta + ab\cos 2\vartheta) + \ldots.\right.$$

$$\left.\ldots. + e^{-ab\sin\overline{n-2}\,\vartheta}\sin(\overline{n-2}\,m\vartheta + ab\cos\overline{n-2}\,\vartheta)\right] \quad (6)$$

und hieraus würde man durch partielle Differenziation nach b auch noch den Werth des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{a^n - x^n}\sin bx\,dx$$

ohne Schwierigkeit ableiten können.

§. 17.

Multiplizirt man von den beiden Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos hu}{k^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{k}\,e^{-hk}\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin hu}{k^2+u^2}\,du = 0$$

das zweite mit $\sqrt{-1} = i$ und subtrahirt es darauf von dem ersten mit der Bemerkung, dass

$$\cos hu - i \sin hu = e^{-hui}$$

ist, so erhält man sogleich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{k^2+u^2}\,e^{-hui} = \frac{\pi}{k}\,e^{-hk}\,. \tag{1}$$

Diese Formel combinirt Lejeune Dirichlet*) mit der aus der Theorie der Gammafunktionen bekannten:

$$\frac{\Gamma(m)}{(a+ui)^m} = \int_0^{\infty} x^{m-1}\,e^{-(a+ui)x}\,dx \tag{2}$$

worin a als positiv vorausgesetzt wird, auf folgende ebenso einfache als nette Weise. Man multiplizirt die vorstehende Gleichung mit

$$\frac{du}{k^2+u^2}\,e^{-hui}$$

und integrirt darauf zwischen den Gränzen $u = -\infty$, $u = +\infty$; es ergiebt sich so:

---

*) M. s. Crelle's *Journal*, *Bd.* 4, *S.* 94.

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(m)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\,\frac{du}{(a+ui)^m} \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{k^2+u^2}\,e^{-hui}\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-(a+ui)x}\,dx \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wobei die rechte Seite durch Vertauschung der beiden Integrationen in

$$\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-ax}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{k^2+u^2}\,e^{-(h+x)ui}$$

übergeht und sich nun die Integration nach u ausführen lässt, wenn man in Formel (1) $h+x$ für h setzt. Das vorliegende Doppelintegral reduzirt sich demnach auf das einfache

$$\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-ax}\,dx\,\frac{\pi}{k}\,e^{-(h+x)k}=\frac{\pi}{k}\,e^{-hk}\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-(a+k)x}\,dx$$

dessen Werth durch

$$\frac{\pi}{k}\,e^{-hk}\,\frac{\Gamma(m)}{(a+k)^m}$$

ausgedrückt wird. Indem man diess für die rechte Seite der Gleichung (3) substituirt, ergiebt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+ui)^m}=\frac{\pi\,e^{-hk}}{k}\cdot\frac{1}{(a+k)^m}. \quad (4)$$

Das Verfahren, welches zu dieser Gleichung führte, lässt sich wieder auf sie selbst anwenden. Multiplizirt man nämlich die der Formel (2) ähnliche

$$\frac{\Gamma(n)}{(b+ui)^n}=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-(b+ui)x}\,dx$$

mit dem Ausdrucke

$$\frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+ui)^m}$$

d. i. dem Nämlichen, was in (4) unter dem Integralzeichen steht, und integrirt wieder zwischen den Gränzen $u=-\infty$, $u=+\infty$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\Gamma(n)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\cdot\frac{1}{(a+ui)^m}\cdot\frac{1}{(b+ui)^n}du\\ =\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\cdot\frac{du}{(a+ui)^m}\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-(b+ui)x}dx.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Durch Umkehrung der Integrationsfolgen geht die rechte Seite in

$$\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-bx}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(h+x)ui}}{k^2+u^2}\frac{du}{(a+ui)^m}$$

wobei man die Formel (4) in Anwendung bringt, indem man darin h durch $h+x$ ersetzt. Das vorliegende Doppelintegral reduzirt sich jetzt auf

$$\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-bx}dx\,\frac{\pi}{k}\,\frac{e^{-(h+x)k}}{(a+k)^m}$$

$$=\frac{\pi}{k}\,\frac{e^{-hk}}{(a+k)^m}\,\frac{\Gamma(n)}{(b+k)^n}$$

und wenn diess in die Gleichung (5) eingeführt wird, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hui}}{k^2+u^2} \cdot \frac{1}{(a+ui)^m} \cdot \frac{1}{(b+ui)^n} du \\ = \frac{\pi e^{-hk}}{k} \cdot \frac{1}{(a+k)^m} \cdot \frac{1}{(b+k)^n} \cdot\end{aligned}\right\} (6)$$

Man wird leicht den weiteren Fortgang dieses Calcüls übersehen; der nächste Schritt z. B. würde darin bestehen, dass man in der Formel (2) c und p für a und m setzt, die so entstandene Gleichung mit Dem multiplizirt, was in Nr. (6) unter dem Integralzeichen enthalten ist, darauf die Integrationsfolgen von x und u vertauscht und die Integrationen dadurch ausführt, dass man erst die Formel (6) für $h+x$ statt h in Anwendung bringt, und die noch übrige Integration nach x mittelst der Fundamentalformel der Gammafunktionen vollendet. Ueberhaupt hat man im Allgemeinen

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{hui}}{k^2+u^2} \frac{1}{(a+ui)^m} \cdot \frac{1}{(b+ui)^n} \cdot \frac{1}{(c+ui)^p} \ldots . du \\ = \frac{\pi e^{-hk}}{k} \frac{1}{(a+k)^m} \cdot \frac{1}{(b+k)^n} \cdot \frac{1}{(c+k)^p} \ldots .\end{aligned}\right\} (7)$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass h, k, a, b, c, ... sämmtlich positive Grössen sein müssen.

Hieraus lässt sich eine fernere Formel dadurch ableiten, dass man eine der Grössen m, n, p, q, etc. wieder als Veränderliche ansieht und in Bezug auf dieselbe differenzirt oder integrirt. Sei etwa y eine jener Grössen und u eine von den Zahlen a, b, c, ... so erhält man durch Multiplikation mit $y^{u-1} dy$ und Integration zwischen den Gränzen $y = 0$, $y = \infty$:

$$\int_0^\infty y^{\mu-1}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\cdot\frac{1}{(a+ui)^m}\,\frac{1}{(b+ui)^n}\cdots\frac{1}{(u+ui)^y}\,du$$

$$= \frac{\pi e^{-hk}}{k}\,\frac{1}{(a+k)^m}\,\frac{1}{(b+k)^n}\cdots\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\,dy}{(a+k)^y}.$$

Kehrt man auf der linken Seite die Integrationsordnung um und bestimmt dann die Werthe der beiderseits vorkommenden Integrale mittelst der Formel

$$\int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}\,dy}{y^s} = \int_0^\infty y^{\mu-1}e^{-y\,ls}\,dy = \frac{\Gamma(\mu)}{(ls)^\mu}$$

so ergiebt sich auf der Stelle

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hui}}{k^2+u^2}\,\frac{1}{(a+ui)^m}\,\frac{1}{(b+ui)^n}\cdots\frac{1}{[l(u+ui)]^\mu}\,du \\ = \frac{\pi e^{-hk}}{k}\,\frac{1}{(a+k)^m}\,\frac{1}{(b+k)^n}\cdots\frac{1}{[l(u+k)]^\mu}.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Verfährt man hier wieder so, indem man unter den Zahlen a, b, c, ... irgend eine β und unter m, n, ... etwa z aushebt, mit $z^{\nu-1}\,dz$ multiplizirt und zwischen $z=0$, $z=\infty$ integrirt, so erhält man eine ganz ähnliche Formel, in welcher zwei logarithmische Faktoren vorkommen. Und so überzeugt man sich überhaupt leicht von der Richtigkeit der allgemeinen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-hui}}{k^2+u^2} \frac{1}{(a+ui)^m} \frac{1}{(b+ui)^n} \cdots \\ \cdots \frac{1}{[l(\alpha+ui)]^\mu} \frac{1}{[l(\beta+ui)]^\nu} \cdots du \\ = \frac{\pi}{k} e^{-hk} \frac{1}{(a+k)^m} \frac{1}{(b+k)^n} \cdots \frac{1}{[l(\alpha+k)]^\mu} \frac{1}{[l(\beta+k)]^\nu} \cdots .\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

welche wegen der vielen in ihr enthaltenen willkührlichen Constanten zahlreiche Spezialisirungen zulässt.

§. 18.

Eine fernere Anwendung der Theoreme

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{2a} e^{-ab} \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \quad (2)$$

gründet sich auf den folgenden sehr einfachen Gedankengang. — Kennt man eine Funktion $F(x)$, welche sich wenigstens für alle innerhalb eines gewissen Intervalles liegenden Werthe von x, mittelst Mac Laurin's Theorem, in eine Reihe von der Form

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \quad (3)$$

verwandeln lässt, so ist es nicht schwer, die Summen der Reihen

$$A + Br\cos u + Cr^2\cos 2u + Dr^3\cos 3u + \ldots$$
$$+ Br\sin u + Cr^2\sin 2u + Dr^3\sin 3u + \ldots$$

worin r den nämlichen Bedingungen wie früher x unterliegt, ausfindig zu machen. Setzt man in Nr. (3) $r(\cos u + i\sin u)$ für x, indem i

die Stelle von $\sqrt{-1}$ vertritt, und zerlegt jetzt $F(x)$ in seine reelle und imaginäre Partie dergestalt, dass

$$F\left[r\,(\cos u + i \sin u)\right] = \Phi(r, u) + i\,{}^{i}\Psi(r, u) \qquad (4)$$

ist, so erhält man auf der Stelle aus der Vergleichung der reellen und imaginären Bestandtheile der nunmehrigen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \Phi(r, u) &= A + Br\cos u + Cr^2 \cos 2u + \ldots \\ {}^{i}\Psi(r, u) &= Br \sin u + Cr^2 \sin 2u + Dr^3 \sin 3u + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Man übersieht nun gleich, dass, wenn man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{du}{a^2 + u^2}$, die zweite mit $\frac{u\,du}{a^2 + u^2}$ multiplizirt und darauf zwischen den Gränzen $u = 0$, $u = \infty$ integrirt, sich jede der Integrationen auf der rechten Seite ausführen lässt, indem man der Reihe nach in Formel (1) $b = 0$, 1, 2, 3, etc. und in Nr. (2) $b = 1$, 2, 3, etc. setzt. Auf diese Weise ergiebt sich ohne die mindeste Schwierigkeit

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(r, u)}{a^2 + u^2}\,du$$

$$= \frac{\pi}{2a}\left[A + Br\,e^{-a} + Cr^2\,e^{-2a} + Dr^3\,e^{-3a} + \ldots\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,{}^{i}\Psi(r, u)}{a^2 + u^2}\,du$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[Br\,e^{-a} + Cr^2\,e^{-2a} + Dr^3\,e^{-3a} + \ldots\right].$$

Die auf der jedesmaligen rechten Seite vorkommenden Reihen sind nach Formel (3) selbst wieder summirbar, indem man dort $r\,e^{-a}$ für x substituirt und bemerkt, dass $A = F(0)$ ist. Demnach kann man jetzt die beiden Theoreme aufstellen:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(r,u)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2a}\,F(r\,e^{-a}), \quad a>0, \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,{}^1\!\Psi(r,u)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\left[F(r\,e^{-a})-F(0)\right], \quad a\geqq 0, \tag{7}$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass die Funktionen F, Φ, ${}^1\!\Psi$ durch die Gleichung (4) mit einander liirt sind und ausserdem das Mac Laurin'sche Theorem auf $F(x)$ anwendbar sein muss. Man kann zu den obigen zwei Theoremen gleich noch ein drittes stellen, wenn man die Formel (7) für $a=0$ spezialisirt und sie selbst von ihrem speziellen Falle

$$\int_0^\infty \frac{{}^1\!\Psi(r,u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}\left[F(r)-F(0)\right]$$

subtrahirt; man findet so

$$\int_0^\infty \frac{{}^1\!\Psi(r,u)}{a^2+u^2}\,\frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}\left[F(r)-F(r\,e^{-a})\right], \quad a\geqq 0. \tag{8}$$

Es ist nichts leichter, als hierzu Beispiele zu geben. Nimmt man etwa $F(x)=l(1+x)$, welche Funktion für $1\geqq x\geqq -1$ in eine unendliche Potenzenreihe verwandelbar ist, so wird

$$l\left[1+r(\cos u+i\sin u)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}l(1+2r\cos u+r^2)+i\,Arctan\,\frac{r\sin u}{1+r\cos u}$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{l(1+2r\cos u+r^2)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{a}\,l(1+r\,e^{-a}), \quad 1\geqq r\geqq -1, \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,du}{a^2+u^2}\,Arctan\,\frac{r\sin u}{1+r\cos u} = \frac{\pi}{2a}\,l(1+r\,e^{-a}), \quad 1\geqq r\geqq -1. \tag{10}$$

Digitized by Google

Bemerkenswerth ist noch eine Vorsicht, welche man an den Gränzen $r = \pm 1$ der Gültigkeit dieser Formeln zu beachten hat. So ist für $r = +1$,

$$\int_0^\infty \frac{l(2\cos\frac{1}{2}u)^2}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{a}\,l(1+e^{-a})$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,Arctan\,(tan\,\frac{1}{2}u)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2a}\,l(1+e^{-a})$$

aber man darf sich hier nicht einfallen lassen, $2\,l(2\cos\frac{1}{2}u)$ für $l(2\cos\frac{1}{2}u)^2$ und $\frac{1}{2}u$ für $Arctan\,(tan\,\frac{1}{2}u)$ schreiben zu wollen. Die ersten beiden Funktionen sind nämlich blos so lange identisch, als $\cos\frac{1}{2}u$ positiv bleibt, also von $u = -\pi$ bis $u = +\pi$, darüber hinaus wird $2\,l(2\cos\frac{1}{2}u)$ stellenweis imaginär, während $l(2\cos\frac{1}{2}u)^2$ immer reell bleibt. Ebenso fallen die Funktionen $\frac{1}{2}u$ und $Arctan\,(tan\,\frac{1}{2}u)$ nur von $u = -\pi$ bis $u = +\pi$ zusammen, für $u > \pi$ dagegen tritt in der zweiten ein periodischer Zeichenwechsel und eine Oscillation zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ ein, während die erste immer wächst und ihr Vorzeichen nie ändert. Ganz ähnliche Bemerkungen treffen den Fall $r = -1$. — Nimmt man in der Formel (9) $r = \frac{1}{\varrho}$, wo nun $\varrho > 1$ ist, so wird

$$\int_0^\infty \frac{l(\varrho^2+2\varrho\cos u+1) - l(\varrho^2)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{a}\,l\left(1+\frac{1}{\varrho}\,e^{-a}\right)$$

und wenn man die einzelnen Bestandtheile des Integrales links trennt und wieder r für ϱ schreibt

$$\int_0^\infty \frac{l(1+2r\cos u+r^2)}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{a}\,l(r+e^{-a}),\quad r>1.$$

Hier sieht man a posteriori, dass die Formel (9) nicht für $r > 1$ gelten kann, indem der Werth des Integrales in diesem Falle ein anderer ist, als für $r < 1$.

Als zweites Beispiel für die Anwendung der Theoreme (6), (7) und (8) diene die Annahme

$$F(x) = \frac{1}{1+x}$$

wo nun $1 > x > -1$ sein muss, weil nur unter dieser Bedingung der Ausdruck in eine Potenzenreihe verwandelbar ist. Hier wird nun

$$\frac{1}{1+r(\cos u + i \sin u)} = \frac{1+r\cos u}{1+2r\cos u+r^2} - i\frac{r\sin u}{1+2r\cos u+r^2}$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{1+r\cos u}{1+2r\cos u+r^2} \cdot \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2a}\frac{1}{1+re^{-a}}, \quad 1>r>-1, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \frac{r\sin u}{1+2r\cos u+r^2} \cdot \frac{u\,du}{a^2+u^2} = \frac{\pi}{2}\frac{re^{-a}}{1+re^{-a}}, \quad 1>r>-1. \quad (12)$$

Der Gränzfall $r = \pm 1$ bedarf hier noch einer besonderen Untersuchung; da nämlich die Gleichungen

$$\Phi(r,u) = \frac{1+r\cos u}{1+2r\cos u+r^2}$$

$$= 1 - r\cos u + r^2\cos 2u - r^3\cos 3u + \ldots.$$

$$\Psi(r,u) = \frac{r\sin u}{1+2r\cos u+r^2}$$

$$= r\sin u - r^2\sin 2u + r^3\sin 3u - \ldots.$$

für $r = \pm 1$ ihre Gültigkeit verlieren, so ist man offenbar nicht berechtigt, die Formeln (11) und (12) für diesen Fall in Anspruch zu nehmen. Man hilft sich dann sehr einfach auf folgende Weise. Sei etwa $r = +1$, so ist:

$$\sin u - \sin 2u + \sin 3u - \ldots + \sin nu$$

$$= \tfrac{1}{2}\tan \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(2u+1)\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}$$

wovon man sich leicht durch beiderseitige Multiplikation mit $2\cos\frac{u}{2}$ überzeugen kann. Durch Zusetzung des Faktors $\frac{u\,du}{a^2+u^2}$ und Integration jedes einzelnen Gliedes ergiebt sich hieraus

$$\frac{\pi}{2}\left[e^{-a} - e^{-2a} + e^{-3a} - \ldots + e^{-na}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u\tan\frac{1}{2}u}{a^2+u^2}\,du + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin k\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\cdot\frac{u\,du}{a^2+u^2}$$

wobei k zur Abkürzung für $2n+1$ dient. Lässt man nun n und ebenso k ins Unendliche wachsen, so wird

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u\tan\frac{1}{2}u}{a^2+u^2}\,du + \tfrac{1}{2}\,Lim\int_0^\infty \frac{\sin k\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}\,\frac{u\,du}{a^2+u^2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[e^{-a} - e^{-2a} + e^{-3a} - \ldots \text{ in inf.}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-a}}{1+e^{-a}}.$$

Setzt man in dem zweiten Integrale links $u = 2t$ und bringt noch den Faktor $\frac{\mathrm{I}}{\sin t}\sin t$ hinzu, so ist jenes Integral auch:

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\,\frac{4t\,dt}{a^2+4t^2}$$

und der Gränzwerth hiervon ist die Null, wie man leicht mit Hülfe der Formel (10) in §. 3 für

$$f(t) = \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{4t}{a^2 + 4t^2}$$

finden wird. Es bleibt demnach

$$\int_0^\infty \frac{u \tan \frac{1}{2}u}{a^2 + u^2}\, du = \frac{\pi e^{-a}}{1 + e^{-a}}. \qquad (13)$$

Das Nämliche ergiebt sich auch aus der Formel (12) für $r = 1$, so dass dieselbe noch in diesem Falle richtig bleibt. Wenn es also auch unrichtig gewesen wäre, schlechtweg

$$\tfrac{1}{2}\tan \tfrac{1}{2}u = \sin u + \sin 2u + \sin 3u - \ldots.$$

zu setzen, so ist diese Substitution doch unter dem Integralzeichen erlaubt, weil der an sich nicht verschwindende Rest der vorstehenden Reihe nach geschehener Integration sich annullirt. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass die Formel (12) auch für $r = -1$ gilt, während man dagegen in Nr. (11) r weder $= +1$ noch $= -1$ setzen darf.

Eine ganz analoge Betrachtung ist auf die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu}{a^2 - u^2}\, du = \frac{\pi}{2a} \sin ab, \quad a > 0, \qquad (14)$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2 - u^2}\, du = -\frac{\pi}{2} \cos ab, \quad a \gtrless 0, \qquad (15)$$

anwendbar und führt zu zwei Theoremen, welche einige Aehnlichkeit mit den in (6) und (7) entwickelten haben. Für

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

und

$$\Phi(r, u) = A + Br\cos u + Cr^2\cos 2u + \ldots$$

$$\Psi(r, u) = Br\sin u + Cr^2\sin 2u + Dr^3\sin 3u + \ldots$$

ergiebt sich nämlich sehr leicht

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(r, u)}{a^2 - u^2}\, du$$

$$= \frac{\pi}{2a}\left[A + Br\sin a + Cr^2\sin 2a + \ldots\ldots\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,\Psi(r, u)}{a^2 - u^2}\, du$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[Br\cos a + Cr^2\cos 2a + Dr^3\cos 3a + \ldots\right]$$

d. i. wenn man die Reihen rechts summirt

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(r, u)}{a^2 - u^2}\, du = \frac{\pi}{2a}\left[F(0) + \Psi(r, a)\right], \quad a > 0, \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,\Psi(r, u)}{a^2 - u^2}\, du = \frac{\pi}{2}\left[F(0) - \Phi(r, a)\right], \quad a \geqq 0. \quad (17)$$

Für $a = 0$ giebt die zweite Formel unter der Bemerkung, dass $\Phi(r, 0) = F(r)$ ist

$$\int_0^\infty \frac{\Psi(r, u)}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\left[F(0) - F(r)\right]$$

und zu diesen Theoremen wird man ebenso leicht Beispiele finden, wie zu den vorigen.

Etwas allgemeinere Formeln kann man noch erhalten, wenn man statt von den Gleichungen (1) und (2) von den folgenden

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu u \cos nu}{a^2 + u^2} du = \frac{\pi}{4a} (e^{\mu a} + e^{-\mu a}) e^{-na}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \mu u \sin nu}{a^2 + u^2} du = \frac{\pi}{4a} (e^{\mu a} - e^{-\mu a}) e^{-na}$$

$$\int_0^\infty \frac{u \cos \mu u \sin nu}{a^2 + u^2} du = \frac{\pi}{4} (e^{\mu a} + e^{-\mu a}) e^{-na}$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin \mu u \cos nu}{a^2 + u^2} du = -\frac{\pi}{4} (e^{\mu a} - e^{-\mu a}) e^{-na}$$

ausgeht, deren an die Bedingung $\mu < n$ geknüpfte Richtigkeit leicht dadurch zu erkennen ist, dass man die links vorkommenden Produkte goniometrischer Funktionen in Summen oder Differenzen zerlegt.

§. 19.

Der Nerv unserer im vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtung liegt, wie man leicht bemerken wird, hauptsächlich darin, dass die in den Grundformeln (1) und (2), (14) und (15) vorkommende willkührliche Constante b verschiedene Werthe erhielt und darauf alle so entstandenen Gleichungen addirt wurden, entweder unmittelbar, oder nach vorgängiger Multiplikation mit beliebigen constanten Faktoren, wie A, Br, Cr^2 etc. Der gute Erfolg dieser Manipulation muss uns auffordern, eine ähnliche Rechnung in Bezug

auf die Constante a durchzuführen, was in der That keine Schwierigkeiten macht.

Schreiben wir z. B. in der Formel (6) des §. 6 u für a, ω für x und multipliziren die so entstandene Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\omega u}+e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}-\cos\omega\,\frac{u}{1^2+u^2}+\cos 2\omega\,\frac{u}{2^2+u^2}-\cos 3\omega\,\frac{u}{3^2+u^2}+\ldots$$

$$\pi \geqq \omega \geqq -\pi$$

mit $\sin bu\,du$, so erhellt auf der Stelle, dass sich jedes Glied der Reihe rechts zwischen den Gränzen $u=0$ und $u=\infty$ integriren lässt, sobald man die Formel (2) des vorigen Paragraphen für $a=0, 1, 2, \ldots$ in Anspruch nimmt. Man findet nämlich

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}+e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\sin bu\,du$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{2}-\cos\omega\,e^{-b}+\cos 2\omega\,e^{-2b}-\cos 3\omega\,e^{-3b}+\ldots.\right]$$

wobei sich die Reihe auf der rechten Seite nach der bekannten Formel

$$\tfrac{1}{2}-r\cos\omega+r^2\cos 2\omega-r^3\cos 3\omega+\ldots$$

$$=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1+2r\cos\omega+r^2}$$

summiren lässt. Man erhält so ohne Schwierigkeit:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}+e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\sin bu\,du &= \tfrac{1}{2}\,\frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{b}+2\cos\omega+e^{-b}}\\ b>0,\quad \pi &\geqq \omega \geqq -\pi .\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Zu einem ganz analogen Resultate gelangt man durch ähnliche Behandlung der für $\pi > \omega > -\pi$ geltenden Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}$$

$$= \sin\omega\,\frac{1}{1^2+u^2} - 2\sin 2\omega\,\frac{1}{2^2+u^2} + 3\sin 3\omega\,\frac{1}{3^2+u^2} - \ldots .$$

welche mit Nr. (11) in §. 6 identisch ist. Multiplizirt man nämlich mit $\cos bu\,du$, integrirt hierauf zwischen den Gränzen $u=0$, $u=\infty$ und bestimmt die Werthe der einzelnen Integrale rechts nach Formel (1) des vorigen Paragraphen, indem man $a=1, 2, 3, \ldots$ nimmt, so wird

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cos bu\,du$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\sin\omega\,e^{-b} - \sin 2\omega\,e^{-2b} + \sin 3\omega\,e^{-3b} - \ldots .\right]$$

und durch Summirung der Reihe rechts

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{\omega u}-e^{-\omega u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cos bu\,du &= \frac{\sin\omega}{e^{b}+2\cos\omega+e^{-b}}\\ b\geqq 0,\quad \pi &> \omega > -\pi .\end{aligned}\right\}\ (2)$$

Als spezielle Fälle der Formeln (1) und (2) sind bemerkenswerth:

1) Für $\omega = 0$ aus Nr. (1)

$$\int_0^\infty \frac{\sin bu\, du}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} = \tfrac{1}{4} \frac{e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b}}, \quad b > 0, \tag{3}$$

ferner für $\omega = \pi$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \sin bu\, du = \tfrac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b}}{e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}}, \quad b > 0, \tag{4}$$

und wenn man hiervon die vorige Gleichung doppelt genommen subtrahirt, so findet man noch

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}\pi u} - e^{-\frac{1}{2}\pi u}}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \sin bu\, du = \frac{2}{e^b - e^{-b}}, \quad b > 0. \tag{5}$$

2) Nimmt man in der Formel (2) $\omega = \frac{\pi}{2}$ so wird

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}} = \frac{1}{e^b + e^{-b}}, \quad b \geqq 0. \tag{6}$$

Der soeben ausgesprochene Gedanke lässt sich noch etwas weiter ausführen und liefert dann die Werthe der allgemeineren Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \cdot \frac{\sin bu}{\mu^2 + u^2}\, du \tag{7}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \cdot \frac{\cos bu}{\mu^2 + u^2}\, du. \tag{8}$$

I. Setzt man statt der Grösse

$$\frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}$$

die vorhin benutzte Reihe, so zerfällt das in Rede stehende Integral (7) in:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin bu}{\mu^2+u^2}\cdot\frac{du}{u} - \frac{2\cos\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{(1^2+u^2)(\mu^2+u^2)}$$

$$+\frac{2\cos 2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{(2^2+u^2)(\mu^2+u^2)} - \ldots\ldots$$

Jedes einzelne Integral auf der rechten Seite lässt sich leicht verwerthen, wenn man bemerkt, dass ihre allgemeine Form

$$\int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{(n^2+u^2)(\mu^2+u^2)}$$

$$= \frac{1}{n^2-\mu^2}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\mu^2+u^2} - \frac{1}{n^2+u^2}\right\} u\sin bu\,du$$

$$= \frac{1}{n^2-\mu^2}\,\frac{\pi}{2}\,(e^{-\mu b} - e^{-nb})$$

ist, woraus man sogleich findet:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}\,\frac{\sin bu}{\mu^2+u^2}\,du \qquad (9)$$

$$= \frac{1}{2\mu^2}(1 - e^{-\mu b}) - \frac{\cos\omega}{1^2-\mu^2}(e^{-\mu b} - e^{-b})$$

$$+\frac{\cos 2\omega}{2^2-\mu^2}(e^{-\mu b} - e^{-2b})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei die Bedingung $\pi \geqq \omega \geqq -\pi$ zu berücksichtigen ist. Zur vollständigen Angabe des Integrales links würde nun noch die Summirung der rechts vorkommenden Reihe gehören, was aber nicht immer ausführbar ist. Mit Leichtigkeit lässt sich diese Summirung nur in einigen speziellen Fällen bewerkstelligen, welche daher näher betrachtet werden mögen.

Für $\mu = 1$ findet man zunächst

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\sin bu}{1+u^2}\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - e^{-b}) - \cos\omega \frac{b}{2} e^{-b}$$

$$+ \frac{\cos 2\omega}{1.3}(e^{-b} - e^{-2b})$$

$$- \frac{\cos 3\omega}{2.4}(e^{-b} - e^{-3b})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - e^{-b}) - \frac{b}{2} e^{-b} \cos\omega$$

$$+ e^{-b}\left(\frac{\cos 2\omega}{1.3} - \frac{\cos 3\omega}{2.4} + \frac{\cos 4\omega}{3.5} - \ldots.\right)$$

$$- \left(e^{-2b}\frac{\cos 2\omega}{1.3} - e^{-3b}\frac{\cos 3\omega}{2.4} + e^{-4b}\frac{\cos 4\omega}{3.5} - \ldots..\right). \quad (10)$$

Man übersieht auf der Stelle, dass es hier blos auf die Summirung einer Reihe von der Form

$$\frac{r^2\cos 2\omega}{1.3} - \frac{r^3\cos 3\omega}{2.4} + \frac{r^4\cos 4\omega}{3.5} - \ldots, \quad r < 1,$$

ankommt, die sich leicht in folgender Weise ausführen lässt. Es ist bekanntlich:

$$\tfrac{1}{2}\,l(1+2r\cos\omega+r^2)=\frac{r\cos\omega}{1}-\frac{r^2\cos 2\omega}{2}+\frac{r^3\cos 3\omega}{3}-\ldots.$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{r\sin\omega}{1+r\cos\omega}=\frac{r\sin\omega}{1}-\frac{r^2\sin 2\omega}{2}+\frac{r^3\sin 3\omega}{3}-\ldots.$$

wobei wir die links vorkommenden Funktionen zur Abkürzung mit $\varphi(r,\omega)$, $\psi(r,\omega)$ bezeichnen wollen. Man findet jetzt sehr leicht

$$\varphi(r,\omega)\cos\omega+\psi(r,\omega)\sin\omega$$
$$=\frac{r}{1}-\frac{r^2\cos\omega}{2}+\frac{r^3\cos 2\omega}{3}-\frac{r^4\cos 3\omega}{4}+\ldots.$$

$$\varphi(r,\omega)\cos\omega-\psi(r,\omega)\sin\omega$$
$$=\frac{r\cos 2\omega}{1}-\frac{r^2\cos 3\omega}{2}+\frac{r^3\cos 4\omega}{3}-\ldots.$$

Multiplizirt man die erste Gleichung mit $\frac{1}{r}$, die zweite mit r und zieht jene von dieser ab, so wird

$$-\left(\frac{1}{r}-r\right)\varphi(r,\omega)\cos\omega-\left(\frac{1}{r}+r\right)\psi(r,\omega)\sin\omega$$
$$=-1+\tfrac{1}{2}r\cos\omega-\frac{r^2\cos 2\omega}{3}+\frac{r^3\cos 3\omega}{4}-\frac{r^4\cos 4\omega}{5}+\ldots.$$
$$+\frac{r^2\cos 2\omega}{1}-\frac{r^3\cos 3\omega}{2}+\frac{r^4\cos 4\omega}{3}-\ldots.$$

und hieraus ergiebt sich gleich

$$\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}r\cos\omega-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\varphi(r,\omega)\cos\omega-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\psi(r,\omega)\sin\omega$$
$$=\frac{r^2\cos 2\omega}{1\,.\,3}-\frac{r^3\cos 3\omega}{2\,.\,4}+\frac{r^4\cos 4\omega}{3\,.\,5}-\ldots.$$

Setzt man hier einmal $r = 1$ und dann $r = e^{-b}$, so erhält man die Summen der unter Nr. (10) in Parenthese stehenden Reihen, und wenn man sich endlich an die Bedeutungen von $q(r, \omega)$, $\psi(r, \omega)$ erinnert, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\sin bu}{1+u^2}\, du \\ &= -\tfrac{1}{2}(b\cos\omega + \omega\sin\omega)\, e^{-b} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(e^{b} - e^{-b})\cos\omega \,.\, l(1 + 2e^{-b}\cos\omega + e^{-2b}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(e^{b} + e^{-b})\sin\omega \,.\, Arctan\, \frac{\sin\omega}{e^{b} + \cos\omega} \\ &\qquad \pi \geqq \omega \geqq -\pi. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Durch Spezialisirungen von ω oder Differenziation nach b lassen sich hieraus noch zahlreiche andere Formeln ableiten; da der Mechanismus dieses Verfahrens sehr leicht ist, so brauchen wir ihn nicht näher anzugeben.

Hat μ in der Gleichung (9) einen gebrochenen Werth, so schreibe man sie in der Form

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\sin bu}{\mu^2 + u^2}\, du \\ &= -\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{\mu\cos\omega}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu\cos 2\omega}{2^2 - \mu^2} + \ldots.\right) e^{-\mu b} \\ &\quad + \frac{1}{2\mu^2} + e^{-b}\frac{\cos\omega}{1^2 - \mu^2} - e^{-2b}\frac{\cos 2\omega}{2^2 - \mu^2} + \ldots. \end{aligned}$$

und summire die erste der Reihen rechts nach Formel (2) in §. 6, es wird dann:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\sin bu}{\mu^2 + u^2}\, du = -\frac{\pi}{2\mu} \frac{\cos \mu\omega}{\sin \mu\pi} e^{-\mu b}$$

$$+ \frac{1}{2\mu^2} + e^{-b} \frac{\cos \omega}{1^2 - \mu^2} - e^{-2b} \frac{\cos 2\omega}{2^2 - \mu^2} + e^{-3b} \frac{\cos 3\omega}{3^2 - \mu^2} - \ldots\ldots$$

Hier ist der Fall $\mu = \frac{1}{2}$ bemerkenswerth, für welchen

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\sin bu}{\frac{1}{4} + u^2}\, du = -\pi e^{-\frac{1}{2}b} \cos \tfrac{1}{2}\omega$$

$$+ 2 + 4 \left\{ \frac{e^{-b} \cos \omega}{1 \cdot 3} - \frac{e^{-2b} \cos 2\omega}{3 \cdot 5} + \frac{e^{-3b} \cos 3\omega}{5 \cdot 7} - \ldots. \right\}$$

wird, was sich noch besser gestaltet, wenn man $\frac{1}{2}u$ für u, $2b$ und 2ω für b und ω setzt, wodurch die Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\frac{1}{2}\pi u} - e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \frac{\sin bu}{1 + u^2}\, du = -\frac{\pi}{2} e^{-b} \cos \omega$$

$$+ 1 + 2 \left\{ \frac{e^{-2b} \cos 2\omega}{1 \cdot 3} - \frac{e^{-4b} \cos 4\omega}{3 \cdot 5} + \frac{e^{-6b} \cos 6\omega}{5 \cdot 7} - \ldots. \right\}. \quad (12)$$

Um die Reihe

$$1 + 2 \left\{ \frac{r^2 \cos 2\omega}{1 \cdot 3} - \frac{r^4 \cos 4\omega}{3 \cdot 5} + \frac{r^6 \cos 6\omega}{5 \cdot 7} - \ldots\ldots \right\}$$

zu summiren, verfahren wir hier ganz ähnlich wie vorhin; behalten nämlich $q(r, \omega)$ und $\psi(r, \omega)$ die bereits angegebenen Bedeutungen, so ist wie früher

$$q(r, \omega) \cos \omega + \psi(r, \omega) \sin \omega$$

$$= \frac{r}{1} - \frac{r^2 \cos \omega}{2} + \frac{r^3 \cos 2\omega}{3} - \frac{r^4 \cos 3\omega}{4} + \ldots.$$

Nimmt man hierin r negativ, subtrahirt die so entstehende neue Gleichung von der vorstehenden, so folgt nach Division mit $2r$

$$\frac{1}{2r}\left[\varphi(r,\omega)-\varphi(-r,\omega)\right]\cos\omega+\frac{1}{2r}\left[\psi(r,\omega)-\psi(-r,\omega)\right]\sin\omega$$

$$=1+\frac{r^2\cos 2\omega}{3}+\frac{r^4\cos 4\omega}{5}+\frac{r^6\cos 6\omega}{7}+\ldots.$$

und wenn man $\frac{\pi}{2}-\omega$ für ω schreibt

$$\frac{1}{2r}\left[\varphi(r,\tfrac{\pi}{2}-\omega)-\varphi(-r,\tfrac{\pi}{2}-\omega)\right]\sin\omega$$

$$+\frac{1}{2r}\left[\psi(r,\tfrac{\pi}{2}-\omega)-\psi(-r,\tfrac{\pi}{2}-\omega)\right]\cos\omega$$

$$=1-\frac{r^2\cos 2\omega}{3}+\frac{r^4\cos 4\omega}{5}-\frac{r^6\cos 6\omega}{7}+\ldots. \qquad (13)$$

Ferner ist wieder wie schon früher

$$\varphi(r,\omega)\cos\omega-\psi(r,\omega)\sin\omega$$

$$=\frac{r\cos 2\omega}{1}-\frac{r^2\cos 3\omega}{2}+\frac{r^3\cos 4\omega}{3}-\ldots..$$

Nimmt man hierin r negativ, subtrahirt die entstehende neue Gleichung von der alten und multiplizirt darauf mit $\frac{r}{2}$, so wird

$$\frac{r}{2}\left[\varphi(r,\omega)-\varphi(-r,\omega)\right]\cos\omega-\frac{r}{2}\left[\psi(r,\omega)-\psi(\quad r,\omega)\right]\sin\omega$$

$$=\frac{r^2\cos 2\omega}{1}+\frac{r^4\cos 4\omega}{3}+\frac{r^6\cos 6\omega}{5}+\ldots.$$

oder wenn man $\frac{\pi}{2}-\omega$ an die Stelle von ω setzt,

$$\frac{r}{2}\left[\varphi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \varphi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] \sin\omega$$

$$-\frac{r}{2}\left[\psi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \psi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] \cos\omega$$

$$= -\frac{r^2 \cos 2\omega}{1} + \frac{r^4 \cos 4\omega}{3} - \frac{r^6 \cos 6\omega}{5} + \ldots . \qquad (14)$$

Subtrahirt man endlich Nr. (14) von Nr. (13), so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\left[\varphi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \varphi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] \sin\omega$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+r\right)\left[\psi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \psi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right)\right] \cos\omega$$

$$= 1 + 2\left\{\frac{r^2 \cos 2\omega}{1.3} - \frac{r^4 \cos 4\omega}{3.5} + \frac{r^6 \cos 6\omega}{5.7} - \ldots\right\}$$

womit die fragliche Reihe summirt ist. Man kann dabei noch bemerken, dass, vermöge der bekannten Formeln

$$l\alpha - l\beta = l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$Arctan\,\alpha + Arctan\,\beta = Arctan\,\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

die eingeklammerten Funktionendifferenzen folgende Formen annehmen:

$$\varphi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \varphi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{1+2r\sin\omega+r^2}{1-2r\sin\omega+r^2}\right)$$

$$\psi\left(r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) - \psi\left(-r, \frac{\pi}{2}-\omega\right) = Arctan\,\frac{2\cos\omega}{\frac{1}{r}-r}\,.$$

Setzt man endlich $r = e^{-b}$, so giebt die Gleichung (12)

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{\frac{1}{2}\pi u} - e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \cdot \frac{\sin bu}{1+u^2}\, du \\
&= -\frac{\pi}{2} e^{-b} \cos\omega \\
&\quad + \tfrac{1}{4}\left(e^{b} - e^{-b}\right) \sin\omega \,.\, l\left(\frac{e^{b} + 2\sin\omega + e^{-b}}{e^{b} - 2\sin\omega + e^{-b}}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(e^{b} + e^{-b}\right) \cos\omega \,.\, Arctan \frac{2\cos\omega}{e^{b} - e^{-b}}.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\frac{\pi}{2} \geqq \omega \geqq -\pi$$

woraus sich wieder durch Spezialisirungen von ω oder Differenziation nach b verschiedene andere Formeln ableiten liessen.

II. Ein ganz ähnliches Verfahren ist auf das unter Nr. (8) verzeichnete Integral anwendbar; indem man, wie schon früher, die gebrochene Funktion

$$\frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}$$

in eine Reihe verwandelt, was für $\pi > \omega > -\pi$ erlaubt ist, reduzirt sich dasselbe auf

$$\frac{2}{\pi}\sin\omega \int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{(1^2+u^2)(\mu^2+u^2)} - \frac{2}{\pi} 2\sin 2\omega \int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{(2^2+u^2)(\mu^2+u^2)}$$

$$+ \frac{2}{\pi} 3\sin 3\omega \int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{(3^2+u^2)(\mu^2+u^2)} - \ldots\ldots$$

wobei man jedes einzelne Glied leicht integriren kann. Es ist nämlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos bu\, du}{(n^2+u^2)(\mu^2+u^2)}$$

$$= \frac{1}{n^2-\mu^2}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\mu^2+u^2} - \frac{1}{n^2+u^2}\right\} \cos bu\, du$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n^2-\mu^2}\left(\frac{1}{\mu}e^{-\mu b} - \frac{1}{n}e^{-nb}\right)$$

und mithin unter Berücksichtigung der vorhergehenden Schlüsse

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{nu} - e^{-nu}}\,\frac{\cos bu}{\mu^2+u^2}\,du$$

$$= \frac{\sin\omega}{1^2-\mu^2}\left(\frac{1}{\mu}e^{-\mu b} - \tfrac{1}{1}e^{-b}\right) - \frac{2\sin 2\omega}{2^2-\mu^2}\left(\frac{1}{\mu}e^{-\mu b} - \tfrac{1}{2}e^{-2b}\right) + \ldots.$$

und hier glückt es ebenfalls in den Fällen $\mu = 1$ und $\mu = \frac{1}{2}$ die Reihen rechts zu summiren. Zu den Resultaten, welche man auf diese Weise findet, kann man übrigens auch noch auf anderem Wege gelangen, indem man von den unter Nr. I entwickelten Formeln ausgeht. Sei nämlich

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} + e^{-\omega u}}{e^{nu} - e^{-nu}}\,\frac{\sin bu}{\mu^2+u^2}\,du = F(b,\omega)$$

so erhält man durch zwei Differenziationen, von denen die eine sich auf b und die andere auf ω bezieht,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{nu} - e^{-nu}}\,\frac{u^2\cos bu}{\mu^2+u^2}\,du = \frac{d^2F(b,\omega)}{db\,d\omega}$$

oder wegen

$$\frac{u^2}{\mu^2+u^2} = 1 - \frac{\mu^2}{\mu^2+u^2}$$

durch Integration der einzelnen Theile

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \cos bu\, du - \mu^2 \int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos bu}{\mu^2+u^2} du$$

$$= \frac{d^2 F(b,\omega)}{db\, d\omega}.$$

Bestimmt man den Werth des ersten Integrales nach Formel (2), so wird jetzt nach Division mit μ^2

$$\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos bu}{\mu^2+u^2} du = \frac{1}{\mu^2} \frac{\sin\omega}{e^b + 2\cos\omega + e^{-b}} - \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{d^2 F(b,\omega)}{db\, d\omega}$$

wobei $\pi > \omega > -\pi$ sein muss. In den Fällen $\mu = 1$, $\mu = \frac{1}{2}$ lässt sich nun nach dem Früheren die Form von $F(b, \omega)$ angeben und also auch die Differenziation nach b und ω ausführen. Man findet durch diese mehr langweilige als beschwerliche Rechnung für $\mu = 1$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \frac{\cos bu}{1+u^2} du \\ &= \tfrac{1}{2}(b\sin\omega - \omega\cos\omega)\, e^{-b} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(e^b + e^{-b}) \sin\omega \cdot l(1 + 2e^{-b}\cos\omega + e^{-2b}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(e^b - e^{-b}) \cos\omega \cdot \mathrm{Arctan} \frac{\sin\omega}{e^b + \cos\omega} \\ &\qquad \pi > \omega > -\pi \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

und für $\mu = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^{\omega u} - e^{-\omega u}}{e^{\frac{1}{2}\pi u} - e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \frac{\cos bu}{1+u^2}\, du \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-b} \sin\omega \\
&- \tfrac{1}{4}\left(e^{b} + e^{-b}\right)\cos\omega \,.\, l\left(\frac{e^{b} + 2\sin\omega + e^{-b}}{e^{b} - 2\sin\omega + e^{-b}}\right) \\
&+ \tfrac{1}{2}\left(e^{b} - e^{-b}\right)\sin\omega \,.\, \mathit{Arctan}\,\frac{2\cos\omega}{e^{b} - e^{-b}}
\end{aligned}\right\} (17)$$

$$\frac{\pi}{2} > \omega > -\frac{\pi}{2}.$$

Bemerkenswerth sind hier die Spezialisirungen $b = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ in (16) und $\omega = \frac{\pi}{4}$ in Nr. (17); man erhält durch sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi u} + e^{-\frac{1}{2}\pi u}} \frac{du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2} l2$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{1}{4}\pi u} + e^{-\frac{1}{4}\pi u}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\pi - l\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\right\}.$$

§. 20.

Kehren wir von dem reichen Detail analytischer Entwickelungen, welches die einfachsten Beispiele zu den Theoremen Fourier's darboten, wieder zu dem letzteren zurück, und fassen nur die allgemeine

Form desselben ins Auge, so finden wir das Eigenthümliche jener Sätze hauptsächlich darin, dass das Resultat zweier aufeinander folgenden und eine willkührliche Funktion enthaltenden Integrationen in einer sehr einfachen Weise mit eben jener beliebigen Funktion zusammenhängt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, den Gesammteffekt jener Integrationen gleich im Voraus angeben zu können. Die analytischen Vortheile, welche sich an eine derartige Gleichung knüpfen, müssen uns nun, wenn wir die Sprache der Analysis recht verstehen, eine Aufforderung zur weiteren Untersuchung derartiger Beziehungen sein, und in der That ist auch das Theorem Fourier's nicht das einzige Beispiel, in welchem sich mehrfache Integrationen gegenseitig so weit, wenigstens theilweis, aufheben, dass man ihr Endresultat leicht a priori hinstellen kann. Von besonderem Interesse sind uns in dieser Rücksicht noch zwei Theoreme, von denen das eine gewissermassen ein Analogon zum Fourier'schen Satze bildet, und das andere sich durch seine algebraische Form auszeichnet. Auf das erste, mit welchem wir uns zunächst beschäftigen, kommt man durch den sehr naheliegenden Versuch, die Werthe der Integrale

$$\int_0^\alpha \cos xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta) \sin u\vartheta\, d\vartheta \qquad (1)$$

und

$$\int_0^\alpha \sin xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta) \cos u\vartheta\, d\vartheta \qquad (2)$$

welche den in §. 10 unter I und II betrachteten ganz analog gebildet sind, zu bestimmen. Es würde durchaus keine Schwierigkeiten machen, diesen Gedanken ganz in derselben Weise auszuführen, wie es in §. 10 mit den dortigen Formeln geschah; man brauchte zu diesem Zwecke die vorstehenden Integrale nur als die Gränzwerthe zu betrachten, welchen sich für unendlich wachsende k die folgenden beiden:

$$\int_0^k \cos xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta) \sin u\vartheta\, d\vartheta$$

$$\int_0^k \sin xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta) \cos u\vartheta\, d\vartheta$$

nähern und in diesen die Ordnung der Integrationen umzukehren, worauf man zur Anwendung der Theoreme des §. 3 Gelegenheit finden würde; es giebt aber noch einen einfacheren Weg, der darin besteht, dass man die Funktionen $\sin u\vartheta$ und $\cos u\vartheta$ durch bestimmte Integrale ausdrückt, was mit Hülfe der Formeln (5) und (6) in §. 15 geschehen kann, wenn man statt a, x, u darin ϑ, u, t, also

$$\sin u\vartheta = \frac{2\vartheta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ut}{\vartheta^2 - t^2}\, dt \tag{3}$$

$$\cos u\vartheta = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t \sin ut}{\vartheta^2 - t^2}\, dt \tag{4}$$

setzt, wo ϑ und u constant in Bezug auf die Integration nach t sind. Durch Substitution von (3) in (1) geht das fragliche Doppelintegral über in das dreifache

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta)\, d\vartheta \frac{2\vartheta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos ut}{\vartheta^2 - t^2}\, dt$$

welches sich durch Vertauschung der Integrationen nach t und ϑ folgendermassen gestaltet:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty \cos ut\, dt \int_\alpha^\beta \frac{\vartheta F(\vartheta)}{\vartheta^2 - t^2}\, d\vartheta\,. \tag{5}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\int_\alpha^\beta \frac{\vartheta F(\vartheta)}{\vartheta^2 - t^2}\, d\vartheta = f(t)$$

so ist nach dem Fourier'schen Theoreme das Integral in (5)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^\infty \cos ut\, dt\, f(t) = f(x)$$

folglich wenn wir den Werth von $f(x)$ analog dem von $f(t)$ hinschreiben und das Endresultat mit der ursprünglichen Form (1) in eine Gleichung setzen

$$\int_\alpha^\beta \frac{\vartheta F(\vartheta)}{\vartheta^2 - x^2} d\vartheta = \int_0^\infty \cos xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta) \sin u\vartheta\, d\vartheta . \qquad (6)$$

Substituiren wir ebenso die Gleichung (4) in (2), so geht das letztere Doppelintegral über in

$$- \int_0^\infty \sin xu\, du \int_\alpha^\beta F(\vartheta)\, d\vartheta \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t \sin ut}{\vartheta^2 - t^2} dt$$

$$= - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^\infty \sin ut\, dt \int_\alpha^\beta \frac{t F(\vartheta)}{\vartheta^2 - t^2} d\vartheta$$

wo wir zur Abkürzung

$$\int_\alpha^\beta \frac{t F(\vartheta)}{\vartheta^2 - t^2} d\vartheta = f(t)$$

setzen wollen. Es ist dann

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^\infty \sin ut\, dt\, f(t) = - f(x)$$

$$= - \int_\alpha^\beta \frac{x F(\vartheta)}{\vartheta^2 - x^2} d\vartheta$$

Digitized by Google

und folglich mit Beziehung auf die ursprüngliche Form

$$-\int_\alpha^\beta \frac{x\,F(\vartheta)}{\vartheta^2-x^2}\,d\vartheta = \int_0^\infty \sin xu\,du \int_\alpha^\beta F(\vartheta)\cos u\vartheta\,d\vartheta\,. \quad (6^*)$$

Schreibt man endlich in den Gleichungen (6) und (6*) f und t für F und ϑ, so wird

$$-\int_\alpha^\beta \frac{t\,f(t)}{x^2-t^2}\,dt = \int_0^\infty \cos xu\,du \int_\alpha^\beta f(t)\sin ut\,dt \quad (7)$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{x\,f(t)}{x^2-t^2}\,dt = \int_0^\infty \sin xu\,du \int_\alpha^\beta f(t)\cos ut\,dt \quad (8)$$

und diess sind die beiden Formeln, welche einige Analogie zu den Fourier'schen Theoremen besitzen.

Zieht man die obere Gleichung von der unteren ab, so ergiebt sich noch

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{x-t}\,dt = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta f(t)\sin u(x-t)\,dt \quad (9)$$

und diese Formel kann in Verbindung mit dem Fourier'schen zur Verwerthung des doppelten Integrales

$$\int_0^\infty e^{xui}\,du \int_\alpha^\beta e^{-uti} f(t)\,dt$$

worin $i=\sqrt{-1}$ ist, benutzt werden. Der vorstehende Ausdruck ist nämlich

$$= \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta e^{u(x-t)i} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \cos u(x-t)\,f(t)\,dt$$

$$+ i\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \sin u(x-t)\,f(t)\,dt$$

und wenn man im ersten Integrale $\cos u(x-t)$ zerlegt und dabei den Fourier'schen Satz anwendet, so findet sich unter Berücksichtigung der Gleichung (9)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{xui}\,du \int_\alpha^\beta e^{-uti} f(t)\,dt \\ &= \pi f(x) + i\int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{x-t}\,dt \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

wobei aber $\beta > x > \alpha$ sein muss, weil sonst der reelle Bestandtheil sich annullirt, wie schon früher gezeigt wurde.

Eines der einfachsten Beispiele für die unter (7) und (8) ausgesprochenen Theoreme bildet die Annahme $f(x) = e^{-ax}$, es wird dann für $x = b$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$,

$$-\int_0^\infty \frac{t\,dt}{b^2-t^2} e^{-at} = \int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a^2+u^2}\,du \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \frac{b\,dt}{b^2-t^2} e^{-at} = \int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}\,du. \quad (12)$$

Die Integrale auf der linken Seite gehören unter die Zahl derjenigen, welche sich mit Hülfe des Integrallogarithmus verwerthen lassen; setzen wir nämlich in der Definition dieser Transscendenten:

$$\int_0^p \frac{dz}{lz} = li(p)$$

$p = e^{ab}$, $z = e^{a(b-t)}$, so wird $dz = -e^{a(b-t)}\,a\,dt$, $lz = a(b-t)$ und an die Stelle der Gränzen $z = p$, $z = 0$ treten in Bezug auf die neuen $t = 0$, $t = \infty$.

Hierdurch ergiebt sich:

$$-e^{ab}\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{b-t}e^{-at}=li(e^{ab})$$

oder durch Vertauschung der Gränzen

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{b-t}e^{-at}=e^{-ab}li(e^{ab}). \tag{13}$$

Substituirt man dagegen $p=e^{-ab}$ und $z=e^{-a(b+t)}$, so findet man ebenso leicht

$$e^{-ab}\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{b+t}e^{-at}=li(e^{-ab})$$

oder

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{b+t}e^{-at}=-e^{ab}li(e^{-ab}). \tag{14}$$

Die halbe Differenz und die halbe Summe der Gleichungen (13) und (14) geben:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{b\,dt}{b^2-t^2}e^{-at}=\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})-e^{ab}li(e^{-ab})\right] \tag{15}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{t\,dt}{b^2-t^2}e^{-at}=\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})+e^{ab}li(e^{-ab})\right] \tag{16}$$

und die Gleichungen (12) und (11) gehen jetzt in die folgenden über

$$\int_{0}^{\infty}\frac{a\sin bu}{a^2+u^2}du=\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})-e^{ab}li(e^{-ab})\right] \tag{17}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{u\cos bu}{a^2+u^2}du=-\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}li(e^{ab})+e^{ab}li(e^{-ab})\right] \tag{18}$$

welche die Analoga zu den Formeln (1) und (2) des §. 14 bilden.

§. 21.

Es giebt übrigens noch eine zweite Methode um die Gleichungen (17) und (18) aus den beiden vorhergehenden abzuleiten, und die, wenn auch auf einem sehr gewöhnlichen Kunstgriffe beruhend, doch dadurch bemerkenswerth ist, dass man sie zur Entdeckung ähnlicher Resultate benutzen kann.

Vertauscht man nämlich in der Gleichung (15) a und b gegeneinander, wodurch sich der Werth des Integrales nicht ändert, und bemerkt, dass

$$e^{-bt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{t^2+u^2}\,du$$

ist, so wird

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\,e^{-bt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{t^2+u^2}\,du$$

und durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty a u \sin bu\,du \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2-t^2)(u^2+t^2)}.$$

Der Werth des nach t genommenen Integrales ist aber

$$= \frac{\pi}{2u}\,\frac{1}{a^2+u^2}$$

mithin giebt das fragliche Integral in seiner ersten und letzten Form

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\,e^{-bt} = \int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2+u^2}\,du \qquad (1)$$

was mit den Gleichungen (15) und (17) des vorigen Paragraphen

übereinstimmt. Beiderseitige Differenziation nach b bringt noch die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{a^2-t^2} = \int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a^2+u^2}\,du \qquad (2)$$

zum Vorschein, die mit den Formeln (16) und (18) identisch ist. Weiter darf man aber mit der Differenziation nach b nicht gehen, weil sonst die Integrale auf der rechten Seite unbestimmt werden.

Nimmt man dagegen in dem Integrale

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\,e^{-bt}$$

die Substitution

$$e^{-bt} = \frac{2t}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos bu}{t^2+u^2}\,du$$

vor, so verwandelt sich dasselbe der Reihe nach in

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{at\,dt}{a^2-t^2}\int_0^\infty \frac{\cos bu}{t^2+u^2}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty a\cos bu\,du \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(a^2-t^2)(u^2+t^2)}$$

wobei der Werth des nach t genommenen Integrales

$$= l\left(\frac{a}{u}\right)\frac{1}{a^2+u^2}$$

ist; man erhält auf diese Weise

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2-t^2}\,e^{-bt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}\,l\left(\frac{a}{u}\right)du \qquad (3)$$

und durch Differenziation nach b

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{a^2-t^2}\,e^{-bt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2+u^2}\,l\left(\frac{a}{u}\right)du. \qquad (4)$$

Diese Formeln sind nicht weniger bemerkenswerth als die ihnen analogen in (1) und (2), weil man hier, wie dort, den Werth der jedesmaligen linken Seite mit Hülfe des Integrallogarithmus angeben kann.

Eine ganz ähnliche Reduktion lässt sich auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2+t^2}\,e^{-bt}$$

anwenden und führt zu ebenfalls interessanten Formeln. Vermöge der schon im Anfange dieses Paragraphen benutzten Substitution ist nämlich dasselbe

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2+t^2}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{t^2+u^2}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty au\sin bu\,du\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(u^2+t^2)}$$

wobei der Werth des nach t genommenen Integrales

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{u^2-a^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2au}\cdot\frac{1}{a+u}$$

ist; stellt man daher die erste und letzte Form des Integrales in eine Gleichung, so lautet dieselbe

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2+t^2}\,e^{-bt} = \int_0^\infty \frac{\sin bu}{a+u}\,du. \qquad (5)$$

Eine Differenziation nach b darf hier nicht ausgeführt werden,

weil man dadurch auf das, keinen angebbaren Werth habende, Integral

$$\int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a+u}\,du = \int_0^\infty \cos bu\,du - \int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a+u}\,du$$

kommen würde.

Ferner ist vermöge der zweiten für e^{-bt} getroffenen Substitution

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2+t^2}e^{-bt} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{at\,dt}{a^2+t^2}\int_0^\infty \frac{\cos bu}{t^2+u^2}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty a\cos bu\,du \int_0^\infty \frac{t\,dt}{(a^2+t^2)(u^2+t^2)}$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{a\,dt}{a^2+t^2}e^{-bt} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2-u^2}l\left(\frac{a}{u}\right)du \qquad (6)$$

und durch Differenziation nach b

$$\int_0^\infty \frac{t\,dt}{a^2+t^2}e^{-bt} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2-u^2}l\left(\frac{a}{u}\right)du. \qquad (7)$$

Man übersieht nun auf der Stelle, dass die Werthe aller in den Gleichungen (5), (6) und (7) vorkommenden Integrale leicht anzugeben wären, wenn man den Werth von irgend einem derselben entwickeln könnte; diess auszuführen unterliegt aber durchaus keinen Schwierigkeiten, da das auf der rechten Seite von (5) vorkommende Integral so einfach ist, dass es sich leicht auf seine letzten Bestandtheile reduziren lässt. Diese letzten Bestandtheile sind zwei eigenthümliche Transscendenten, zu welchen man auf folgende Weise gelangt. Nach einer sehr bekannten Formel ist

$$li(e^w) = C + \tfrac{1}{2}l(w^2) + \tfrac{1}{1}\frac{w}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{w^2}{1\cdot 2} + \ldots.$$

worin C die von Mascheroni und Soldner zu 0.5772156 ... bestimmte Constante bedeutet. Führen wir jetzt eine neue Transscendente $Ei(w)$ der Art ein, dass

$$Ei(w) = C + \tfrac{1}{4} l(w^4) + \tfrac{1}{1}\frac{w}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{w^2}{1.2} + \ldots . \qquad (8)$$

ist, so erhellt auf der Stelle, dass für alle reellen w diese Transscendente mit $li(e^w)$ zusammenfällt, für imaginäre w dagegen davon verschieden ist. Schreibt man z. B. $w\sqrt{-1}$ für w, so wird $\frac{1}{2} l(w^2)$ imaginär, während $\frac{1}{4} l(w^4)$ reell bleibt und

$$Ei(w\sqrt{-1}) = C + \tfrac{1}{4} l(w^4) - \tfrac{1}{2}\frac{w^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{w^4}{1.2.3.4} - \ldots .$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\tfrac{1}{1}\frac{w}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{w^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{w^5}{1.2..5} - \ldots .\right]$$

herauskommt. Setzen wir nun

$$Ci(w) = C + \tfrac{1}{4} l(w^4) - \tfrac{1}{2}\frac{w^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{w^4}{1.2.3.4} - \ldots \qquad (9)$$

$$Si(w) = \tfrac{1}{1}\frac{w}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{w^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{w^5}{1.2..5} - \ldots \qquad (10)$$

so besteht zwischen unseren drei Transscendenten $Ei(w)$, $Ci(w)$ und $Si(w)$ die Relation

$$Ei(w\sqrt{-1}) = Ci(w) + \sqrt{-1}\, Si(w) \qquad (11)$$

welche der bekannten Gleichung

$$e^{w\sqrt{-1}} = \cos w + \sqrt{-1}\, \sin w$$

völlig analog ist und es rechtfertigen mag, wenn wir $Ei(w)$ die Integralexponentielle, $Ci(w)$ den Integralcosinus und $Si(w)$

den Integralsinus von w nennen. Auf die letzten beiden Funktionen lässt sich nun das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{1+x}\, dx$$

welches von dem in Nr. (5) vorkommenden nur wenig differirt, mittelst folgender Schlüsse reduziren.

Man setze zunächst

$$x = \frac{z}{\gamma} - 1$$

so entsprechen den Werthen $x = 0$, $x = \infty$ die neuen Gränzen $z = \gamma$, $z = \infty$ und man erhält

$$\int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{1+x}\, dx = \int_\gamma^\infty \frac{\sin (z-\gamma)}{z}\, dz$$

$$= \cos\gamma \int_\gamma^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz - \sin\gamma \int_\gamma^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz. \quad (12)$$

Man hat nun weiter

$$\int_\gamma^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz - \int_0^\gamma \frac{\sin z}{z}\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\tfrac{1}{1}\frac{\gamma}{1} - \tfrac{1}{3}\frac{\gamma^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\frac{\gamma^5}{1.2..5} - \ldots\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - Si(\gamma); \quad (13)$$

ferner:

$$\int_\gamma^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz = \int_0^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz - \int_0^\gamma \frac{\cos z}{z}\, dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz - \int_0^\gamma \frac{dz}{z} + \int_0^\gamma \frac{1-\cos z}{z}\, dz$$

oder durch Zerlegung des Intervalles 0 bis γ in 0 bis 1 und 1 bis γ im zweiten Integrale

$$\int_\gamma^\infty \frac{\cos z}{z} dz = \int_0^\infty \frac{\cos z}{z} dz - \int_0^1 \frac{dz}{z}$$

$$- \int_1^\gamma \frac{dz}{z} + \int_0^\gamma \frac{1 - \cos z}{z} dz.$$

Die Differenz der ersten beiden Integrale ist nun offenbar eine blose Zahl, die wir $-K$ nennen wollen, der Werth des dritten Integrales ist $\frac{1}{2} l(\gamma^2)$ und der des vierten ergiebt sich durch Reihenverwandlung, so dass

$$\int_\gamma^\infty \frac{\cos z}{z} dz = - \left[K + \tfrac{1}{2} l(\gamma^2) - \tfrac{1}{2} \frac{\gamma^2}{1.2} + \tfrac{1}{4} \frac{\gamma^4}{1..4} - \ldots\right]. \quad (14)$$

Die bisher noch unbestimmt gebliebene Constante K bestimmt sich sehr leicht dadurch, dass man in ihrer Definition

$$K = \int_0^1 dz \frac{1}{z} - \int_0^\infty \cos z \, dz \frac{1}{z}$$

statt $\frac{1}{z}$ das Integral $\int_0^\infty e^{-zt} dt$ substituirt; es wird dann

$$K = \int_0^1 dz \int_0^\infty e^{-zt} dt - \int_0^\infty \cos z \, dz \int_0^\infty e^{-zt} dt$$

und durch Umkehrung der Integrationsfolge

$$K = \int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-tz} dz - \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-tz} \cos z \, dz$$

$$= \int_0^\infty dt \frac{1 - e^{-t}}{t} - \int_0^\infty dt \frac{t}{1 + t^2}$$

wofür man auch schreiben kann

$$K = \int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}$$

$$+ \int_0^\infty \left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{t(1+t)} - \frac{t}{1+t^2}\right\} dt$$

indem sich das erste Integral aus der ersten Parenthese gegen das zweite Integral der zweiten hebt. Der Werth der ersten Zeile ist aber der Theorie der Gammafunktionen zufolge $= C = 0.5772156\ldots$, die andere Zeile kann in der Form

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right\} dt$$

dargestellt werden, woraus sich ihr Werth $= 0$ findet. Diess zusammen beweist, dass $K = C$, also vermöge der Gleichung (14) bei reellen γ

$$\int_\gamma^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz = -\, Ci(\gamma) \tag{15}$$

ist. Substituiren wir jetzt die unter (13) und (15) gefundenen Resultate in die Gleichung (12), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin \gamma x}{1+x}\, dx = \cos\gamma\left[\frac{\pi}{2} - Si(\gamma)\right] + \sin\gamma\, Ci(\gamma)$$

oder wenn man $\gamma = ab$, $x = \frac{u}{a}$ setzt

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin bu}{a+u}\, du = {} & Ci(ab)\sin ab - Si(ab)\cos ab \\ & + \frac{\pi}{2}\cos ab.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hieran knüpfen sich unmittelbar noch einige interessante Consequenzen. Berücksichtigt man nämlich, dass

$$\int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2 - u^2}\, du = \int_0^\infty \frac{\sin bu}{a+u}\, du + \int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2 - u^2}\, du$$

ist, wie man leicht durch Transposition des zweiten Integrales rechts findet und bestimmt die Werthe beider Integrale rechts, so wird

$$\int_0^\infty \frac{a \sin bu}{a^2 - u^2}\, du = Ci(ab) \sin ab - Si(ab) \cos ab . \qquad (17)$$

Eine Differenziation nach b unter der Bemerkung ausgeführt, dass

$$\frac{d\, Ci(w)}{dw} = \frac{\cos w}{w}, \quad \frac{d\, Si(w)}{dw} = \frac{\sin w}{w}$$

ist, giebt jetzt noch

$$\int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2 - u^2}\, du = Ci(ab) \cos ab + Si(ab) \sin ab . \qquad (18)$$

Vermöge der Gleichung (5) ist nun auch

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{a\, dt}{a^2 + t^2} e^{-bt} &= Ci(ab) \sin ab - Si(ab) \cos ab \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \cos ab \end{aligned}\right\} (19)$$

und durch Differenziation nach b

$$\left.\begin{aligned} -\int_0^\infty \frac{t\, dt}{a^2 + t^2} e^{-bt} &= Ci(ab) \cos ab + Si(ab) \sin ab \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \sin ab \end{aligned}\right\} (20)$$

womit zugleich die Werthe der in (6) und (7) vorkommenden Integrale gefunden sind.

Gruppiren wir jetzt zur leichteren Uebersicht diejenigen Formeln, welche aus den Schematen

$$\int_0^\infty \frac{a\,\varphi(u)}{a^2+u^2}\,du \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{a\,\varphi(u)}{a^2-u^2}\,du$$

entspringen, wenn man für $\varphi(u)$ der Reihe nach, $\cos bu$, $\sin bu$, e^{-bu} setzt, so erhalten wir die folgenden sechs:

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\,e^{-ab}$$

$$\int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} - Ei(-ab)\,e^{ab}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2+u^2}\,e^{-bu} = Ci(ab)\sin ab - Si(ab)\cos ab + \frac{\pi}{2}\cos ab$$

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\sin ab$$

$$\int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2-u^2}\,du = Ci(ab)\sin ab - Si(ab)\cos ab$$

$$\int_0^\infty \frac{a\,du}{a^2-u^2}\,e^{-bu} = \tfrac{1}{2}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} - Ei(-ab)\,e^{ab}\right].$$

Durch Differenziation nach b ergeben sich hieraus noch die folgenden:

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

$$\int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2+u^2}\,du = -\tfrac{1}{2}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} + Ei(-ab)\,e^{ab}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,du}{a^2+u^2} e^{-bu} = -\left[Ci(ab)\cos ab + Si(ab)\sin ab\right] + \frac{\pi}{2}\sin ab$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2-u^2}\,du = -\frac{\pi}{2}\cos ab$$

$$\int_0^\infty \frac{u \cos bu}{a^2-u^2}\,du = Ci(ab)\cos ab + Si(ab)\sin ab$$

$$\int_0^\infty \frac{u\,du}{a^2-u^2} e^{-bu} = \tfrac{1}{2}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} + Ei(-ab)\,e^{ab}\right].$$

Endlich kann man vermöge der Gleichungen (3) und (4) noch hinzustellen:

$$\int_0^\infty \frac{a \cos bu}{a^2+u^2}\, l\left(\frac{a}{u}\right) du = \frac{\pi}{4}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} - Ei(-ab)\,e^{ab}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{u \sin bu}{a^2+u^2}\, l\left(\frac{a}{u}\right) du = \frac{\pi}{4}\left[Ei(ab)\,e^{-ab} + Ei(-ab)\,e^{ab}\right]$$

ebenso wegen (6) und (7):

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2-u^2} l\left(\frac{a}{u}\right) du = -\frac{\pi}{2}\left[Ci(ab)\sin ab - Si(ab)\cos ab\right] - \frac{\pi^2}{4}\cos ab$$

$$\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2-u^2} l\left(\frac{a}{u}\right) du = \frac{\pi}{2}\left[Ci(ab)\cos ab + Si(ab)\sin ab\right] - \frac{\pi^2}{4}\sin ab.$$

§. 22.

Wir kommen nun unserem Versprechen der Entwickelung eines neuen Doppelintegrales für eine beliebige Funktion nach. Man gelangt zu dem fraglichen Theoreme leicht durch folgende Bemerkungen. Multiplizirt man die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt\, dt}{u^2-t^2} = \frac{\pi}{2u}\sin nu$$

mit dem Faktor

$$\frac{u^2\, du}{u^2-a^2}$$

und integrirt darauf nach u zwischen den Gränzen $u=0$, $u=\infty$, so wird

$$\int_0^\infty \frac{u^2\, du}{u^2-a^2}\int_0^\infty \frac{\cos nt\, dt}{u^2-t^2} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{u\sin nu}{u^2-a^2} du = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos na \qquad (1)$$

und man kommt also durch gewisse doppelte Integration des Cosinus wieder auf einen Cosinus zurück. Dieses Theorem lässt sich leicht verallgemeinern, wenn man voraussetzt, dass eine Funktion $f(x)$ bekannt sei, die sich für alle x von $x=0$ bis $x=\infty$ in eine Reihe von der Form

$$f(x) = A\cos x + B\cos 2x + C\cos 3x + \ldots \qquad (2)$$

verwandeln lässt; es ist nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{u^2-a^2}\int_0^\infty \frac{A\cos t + B\cos 2t + C\cos 3t + \ldots}{u^2-t^2}\,dt$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[A\cos a + B\cos 2a + C\cos 3a + \ldots\right]$$

wie man leicht durch Integration der einzelnen Glieder nach Nr. (1) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ findet, und diese Gleichung reduzirt sich vermöge der Bedeutung von $f(x)$ auf

$$\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{u^2-a^2}\int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f(a). \qquad (3)$$

Die Voraussetzung, dass die Gleichung (2) für alle x gelten solle, ist aber eine sehr beschränkende, denn wir wissen aus den Untersuchungen des Cap. I, dass Gleichungen von jener Form gewöhnlich nur für das Intervall $x = 0$ bis $x = \pi$ Bestand haben, und es bleibt daher noch die Frage zu erledigen, ob das bemerkenswerthe Resultat, was sich in der Formel (3) ausspricht, nicht vielleicht allgemeinere Geltung hat und von dem Bestehen der Gleichung (2), die uns hier nur zum weiteren Fortkommen diente, ganz unabhängig ist. Diess entscheidet sich sehr leicht auf folgende Weise.

Jede Funktion $f(x)$ lässt sich, so lange sie endlich und stetig bleibt, unter der Form

$$f(x) = \int_0^\infty \cos x\,\omega\,d\omega\,\varphi(\omega) \qquad (4)$$

darstellen, denn zufolge des Fourier'schen Theoremes genügt es

$$\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$$

zu nehmen, um sogleich die Richtigkeit jener Behauptung gerechtfertigt zu sehen. Substituiren wir demnach:

$$f(t) = \int_0^\infty \cos t\omega \, d\omega \, \varphi(\omega)$$

in das Doppelintegral

$$S = \int_0^\infty \frac{u^2 \, du}{u^2 - a^2} \int_0^\infty \frac{f(t) \, dt}{u^2 - t^2} \tag{5}$$

so geht dasselbe in das dreifache

$$S = \int_0^\infty \frac{u^2 \, du}{u^2 - a^2} \int_0^\infty \frac{dt}{u^2 - t^2} \int_0^\infty \varphi(\omega) \cos t\omega \, d\omega$$

über. Hier versparen wir die Integration nach ω bis zuletzt, ohne die Aufeinanderfolge der Integrationen in Bezug auf t und u zu stören, und schreiben also

$$S = \int_0^\infty \varphi(\omega) \, d\omega \int_0^\infty \frac{u^2 \, du}{u^2 - a^2} \int_0^\infty \frac{\cos \omega t \, dt}{u^2 - t^2}.$$

Aus Nr. (1) ergiebt sich nun für $n = \omega$, dass der Werth des nach t und u genommenen Doppelintegrales $= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos a\omega$ ist, und demnach wird

$$S = \int_0^\infty \varphi(\omega) \, d\omega \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos a\omega$$

d. i. nach Nr. (4) für $x = a$,

$$S = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f(a).$$

Vergleichen wir die erste und letzte Form von S und schreiben x für a, wobei die willkührliche Grösse x als Constante für die beiden nach u und t zu verrichtenden Integrationen figurirt, so ist jetzt ganz allgemein:

$$\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{u^2-x^2}\int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f(x) \qquad (6)$$

und $f(t)$ hier nur der einen Bedingung der Stetigkeit und Endlichkeit von $t=0$ bis $t=\infty$ unterworfen.

Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass man in dem doppelten Integrale nach t und u die Reihenfolge der Integrationen nicht schlechthin umkehren darf, weil die Funktion von t und u, auf welche sich beide Integrationen beziehen, nämlich

$$\frac{u^2 f(t)}{(u^2-x^2)(u^2-t^2)}$$

innerhalb der Integrationsintervalle $t=0$, $t=\infty$ und $u=0$, $u=\infty$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, und zwar für $t=u=x$, wobei sie zugleich unendlich wird. Die Umkehrung ist nur erlaubt, wenn man zu Dem, was dabei herauskommt, nämlich

$$\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(u^2-x^2)(u^2-t^2)} = 0$$

noch denjenigen singulären Werth des Integrales hinzufügt, welcher der Stelle $t=u=x$ entspricht, und dieser Werth ist eben $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f(x)$.

Nimmt man beispielsweis

$$f(t) = \frac{1}{1+t}$$

in dem Theoreme (6), so wird

$$\int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2} = \frac{1}{1-u^2}\,l\left(\frac{1}{u}\right)$$

folglich:

$$\int_0^\infty \frac{l\left(\frac{1}{u}\right) du}{(u^2-x^2)(1-u^2)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{1+x}$$

wie man auch auf anderem Wege finden kann.

Die Formel (6) ist noch dadurch einer Erweiterung fähig, dass man beiderseits in Bezug auf x^2 als unabhängige Variable differenziren kann. Setzen wir nämlich für den Augenblick $x^2 = z$, so ergiebt sich durch n malige Differenziation der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{u^2-z} \int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f(\sqrt{z})$$

leicht die folgende

$$1.2\ldots n \int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(u^2-z)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{(2\sqrt{z})^n}\left[f^{(n)}(\sqrt{z}) - \frac{n(n-1)}{2}\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{2.4}\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{z})}{(\sqrt{z})^2} - \ldots\right]$$

und wenn man für z wieder seinen Werth x^2 einführt,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{(u^2-x^2)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{n!\,(2x)^n}\left[f^{(n)}(x) - \frac{n(n-1)}{2}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}\right. \\ &\left. + \frac{(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{2.4}\frac{f^{(n-2)}(x)}{x^2} - \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

worin n' zur Abkürzung für $1.2..n$ dient. Eines der einfachsten Beispiele hierzu bildet die Annahme $f(x) = e^{-x}$, wobei man den Werth des nach t genommenen Integrales leicht dadurch findet, dass man erst $t = u\tau$ setzt und dann die Formel

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{1-\tau^2} e^{-u\tau} = \tfrac{1}{2}\left[e^{-u}\, li(e^u) - e^u\, li(e^{-u})\right]$$

in Anwendung bringt.

§. 23.

Der letzte endlich und vielleicht grossartigste Gebrauch, den man von den Fourier'schen Formeln in der Gestalt, wie wir sie in den Sätzen (9) und (13) des 10. Paragraphen ausgesprochen haben, machen kann, besteht darin, dass man mit ihrer Hülfe eine Reihe vielfacher Integrale von sehr allgemeiner Form auf einfache oder höchstens doppelte Integrale zu reduziren im Stande ist. Nach den in §. 10 entwickelten Lehren bildet nämlich das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\sigma u\, du \int_\lambda^\varkappa f(t)\cos ut\, dt$$

eine unstetige Funktion der Grösse σ, da der Werth desselben $f(\sigma)$ oder Null ist, je nachdem σ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles λ bis $\varkappa$ liegt, so dass also

$$\frac{2}{\pi f(\sigma)}\int_0^\infty \cos\sigma u\, du \int_\lambda^\varkappa f(t)\cos ut\, dt$$

$$= 1 \text{ ist für } \varkappa > \sigma > \lambda$$

und $$= 0, \quad \text{für } \sigma > \varkappa \text{ oder } \sigma < \lambda.$$

Es kann daher das vorstehende Integral als allgemeinen Diskonti-

nuitätsfaktor dienen, und wenn wir schon im ersten Theile die Vortheile kennen gelernt haben, welche der einfachste aller derartigen Faktoren

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \cos \sigma u \, du$$

der sich für $f(\sigma) = 1$, $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$ aus dem Vorigen ergiebt, für die Reduktion vielfacher Integrale darbot, so dürfen wir hoffen, dass hier die Ausbeute noch viel reicher ausfallen werde. In der That scheint auch die Dirichlet'sche Integrationsmethode in Verbindung mit dem Fourier'schen Theoreme der mächtigste Hebel für die Bewältigung der Schwierigkeiten zu sein, welche der Reduktion vielfacher Integrale von allgemeinen Formen bisher entgegenstanden. Die Leichtigkeit und Eleganz, mit welcher dieses Verfahren zum Ziele führt, wird man aus den folgenden Beispielen ersehen.

Wir betrachten zunächst das vielfache Integral

$$S = \int\int\int .. x^{l-1} y^{m-1} .. e^{-(\alpha x + \beta y + ..)} F(x + y + ..) \, dx \, dy \, ... \quad (1)$$

in welchem α, β, γ, ... positive Constanten bedeuten, von denen, im Falle sie imaginär sind, wenigstens der reelle Bestandtheil als positiv vorausgesetzt wird, und sich die Integrationen auf alle diejenigen lediglich positiven x, y, z, ... beziehen, welche der Bedingung

$$\varkappa \geqq x + y + z + \ldots \geqq \lambda$$

Genüge leisten. Bezeichnen wir zunächst $x + y + \ldots$ zur Abkürzung mit s, so können wir statt der in (1) vorkommenden Funktion $F(s)$ das Integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos su \, du \int_\lambda^\varkappa F(t) \cos ut \, dt$$

substituiren, wofür wir passender:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-su\,i}\,du \int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\cos ut\,dt$$

nehmen wollen, da eine Zerlegung des letzteren in zwei andere von $u=-\infty$ bis $u=0$ und $u=0$ bis $u=\infty$ leicht die Identität desselben mit dem vorhergehenden erkennen lässt. Es ist jetzt

$$S=\frac{1}{\pi}\iint..x^{l-1}y^{m-1}..e^{-(\alpha x+\beta y+..)}\,dx\,dy\,\ldots$$

$$\ldots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-su\,i}\,du\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\cos ut\,dt$$

und hier können wir die Integrationen von $x=0$ bis $x=\infty$, $y=0$ bis $y=\infty$ u. s. f. ausdehnen, weil der für $F(s)$ substituirte Faktor sich annullirt, wenn nicht $\varkappa>s>\lambda$ ist, also ganz von selbst die Elemente des vielfachen Integrales aussondert, welche jener, den Integrationen auferlegten Bedingung nicht genügen. Kehren wir zugleich die Integrationsordnung so um, dass wir zuerst nach x, y, z, ... und erst am Ende nach u und t integriren, so wird

$$S=\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,dt\int_{0}^{\infty}\cos tu\,du$$

$$\iint_{0}^{\infty}\int..x^{l-1}y^{m-1}..e^{-(\alpha x+\beta y+..)}e^{-su\,i}\,dx\,dy\,..$$

Setzt man für s seinen Werth, so zerfällt die Integration nach x, y, z, .. in das blose Produkt der Integrale

$$\int_{0}^{\infty} x^{l-1}e^{-(\alpha+ui)x}\,dx,\quad \int_{0}^{\infty} y^{m-1}e^{-(\beta+ui)y}\,dy,\ \ldots$$

von denen jedes einzelne nach der Formel:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-(k+ui)x}\, dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k+ui)^\mu}$$

bestimmt werden kann. Es wird jetzt

$$S = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,..}{\pi} \int_\lambda^\mu F(t)\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{(\alpha+ui)^l (\beta+ui)^m\,..} \qquad (2)$$

und hiermit ist das vielfache Integral (1) auf ein doppeltes reduzirt.

Es knüpft sich hieran noch eine bemerkenswerthe Consequenz. Schreibt man nämlich in der so eben entwickelten Gleichung

$$\int\int .. x^{l-1} y^{m-1} .. e^{-(\alpha x+\beta y+..)} F(s)\,dx\,dy\,..$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,..}{\pi} \int_\lambda^\mu F(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tu\, du}{(\alpha+ui)^l (\beta+ui)^m\,..}$$

$\alpha\omega$, $\beta\omega$, .. für α, β, .. und setzt $u = \omega v$, so wird

$$\int\int .. x^{l-1} y^{m-1} .. e^{-(\alpha x+\beta y+..)\omega} F(s)\,dx\,dy\,..$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,..}{\pi} \int_\lambda^\mu F(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(\alpha+vi)^l (\beta+vi)^m\,..} \frac{\cos \omega tv}{\omega^{l+m+..-1}}.$$

Diese Gleichung multipliziren wir mit

$$\omega^{l+m+..-1} e^{-\theta\omega}\, d\omega$$

und integriren darauf nach ω zwischen den Gränzen $\omega = 0$ und

$\omega = \infty$; da auf der linken Seite ω nur in der Exponentialgrösse vorkommt, so erhalten wir dort ausser den Integrationen nach x, y, etc. noch das Integral

$$\int_0^\infty \omega^{l+m+..-1} e^{-(\vartheta+\alpha x+\beta y+..)\omega} d\omega$$

$$= \frac{\Gamma(l+m+...)}{(\vartheta+\alpha x+\beta y+...)^{l+m+..}}.$$

Auf die rechte Seite dagegen kommt in Bezug auf ω noch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\vartheta\omega} \cos vt\omega \, d\omega = \frac{\vartheta}{\vartheta^2+(vt)^2}$$

zu stehen, so dass jetzt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(l+m+..) \iiint .. \frac{x^{l-1} y^{m-1} .. F(s)\, dx\, dy\, ..}{(\vartheta+\alpha x+\beta y+..)^{l+m+..}} \\ &= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)..}{\pi} \int_\lambda^\varkappa F(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(\alpha+vi)^l (\beta+vi)^m ..} \frac{\vartheta}{\vartheta^2+(vt)^2} \end{aligned}\right\} (3)$$

zum Vorschein kommt. Schreibt man das Doppelintegral rechts, abgesehen von seinem Coeffizienten, in der Form

$$\vartheta \int_\lambda^\varkappa F(t) \frac{dt}{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^2+v^2} \frac{1}{(\alpha+vi)^l (\beta+vi)^m ..}$$

so erkennt man sogleich, dass sich hier die Integration in Bezug

auf v ausführen lässt, wenn man die Formel (7) des §. 17 für $h=0$, $k=\frac{\vartheta}{t}$ in Anwendung bringt. Das Integral geht nämlich in

$$\int_{\lambda}^{x} F(t)\frac{dt}{t^2}\cdot\frac{nt}{\left(\alpha+\frac{\vartheta}{t}\right)^{l}\left(\beta+\frac{\vartheta}{t}\right)^{m}..}$$

über. Schafft man die Brüche im Nenner weg, so folgt jetzt aus Nr. (3) für $x>x+y+..>\lambda$

$$\left.\begin{aligned}&\int\int..\frac{x^{l-1}y^{m-1}..F(x+y+..)}{(\vartheta+\alpha x+\beta y+..)^{l+m+..}}dx\,dy..\\&=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)..}{\Gamma(l+m+..)}\int_{\lambda}^{x}\frac{t^{l+m+..-1}F(t)\,dt}{(\vartheta+\alpha t)^{l}(\vartheta+\beta t)^{m}....}\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Diese bemerkenswerthe Formel enthält unter Anderem das in §. 19 entwickelte Theorem von Liouville, in so fern es für $\lambda=0$, $x=1$ und $\vartheta=1$, $\alpha=\beta..=0$, oder $\vartheta=\alpha=\beta..=1$ und $F(t)=(1+t)^{l+m+..}$ dasselbe zum Vorschein bringt.

Es lässt sich aus der obigen Gleichung noch eine zweite ableiten, in welcher eine ganz beliebige Potenz der Grösse $\vartheta+\alpha x+\beta y+...$ vorkommt. Setzen wir nämlich $\vartheta+\tau$ an die Stelle von ϑ und zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\vartheta+\alpha x+\beta y+\ldots&=\sigma\\ l+m+n+\ldots&=k\end{aligned}$$

multipliziren darauf beiderseits mit $\tau^{k-\mu-1}d\tau$ und integriren nach τ zwischen den Gränzen $\tau=0$, $\tau=\infty$, so kommt auf die linke Seite,

ausser den Integrationen nach x, y, ..., noch die folgende zu stehen:

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{k-\mu-1}\, d\tau}{(\sigma+\tau)^k}$$

die sich leicht ausführen lässt, wenn man $\tau = \sigma t$ setzt, wodurch dasselbe in

$$\frac{1}{\sigma^\mu}\int_0^\infty \frac{t^{k-\mu-1}\, dt}{(1+t)^k} = \frac{\Gamma(k-\mu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(k)}$$

übergeht, vorausgesetzt, dass $\mu < k$ ist, weil ausserdem das Integral unendlich werden würde. Substituiren wir diess und nehmen auf der rechten Seite von (4) die angedeuteten Operationen ebenfalls vor, so wird vermöge der Bedeutung von σ

$$\left.\begin{aligned} &\int\int\int \ldots \frac{x^{l-1}\, y^{m-1} \ldots F(x+y+\ldots)\, dx\, dy}{(\vartheta+\alpha x+\beta y+\ldots)^\mu} \\ &= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\ldots}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(k-\mu)} \int_0^\infty \tau^{k-\mu-1}\, d\tau \int_\lambda^\infty \frac{t^{k-1}\, F(t)\, dt}{(\vartheta+\tau+\alpha t)^l\,(\vartheta+\tau+\beta t)^m \ldots} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

womit jene vielfache, auf alle, der Bedingung $x > x+y+z+\ldots > \lambda$ genügenden, positiven x, y, z, ... sich beziehende Integration auf eine zweifache, zwischen constanten Gränzen vorzunehmende, reduzirt ist.

Man kann diese Theoreme noch dadurch etwas erweitern, dass man, wie schon im §. 19, an die Stelle von x, y, z, ... setzt: $\left(\frac{x}{a}\right)^p$, $\left(\frac{y}{b}\right)^q$, .. ferner $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{q}$, .. für l, m, ... und $a^p\alpha$, $b^q\beta$, .. für α, β, etc. So erhält man z. B. für $F(t) = Const. = 1$ aus (4):

$$\iiint \cdots \frac{x^{l-1}\, y^{m-1} \cdots dx\, dy \cdots}{(\vartheta + \alpha x^p + \beta y^q + \cdots)^{\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\cdots}}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{l}{p})\,\Gamma(\frac{m}{q}) \cdots}{\Gamma(\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\cdots)} \frac{a^l b^m \cdots}{pq\cdots} \int_\lambda^\varkappa \frac{t^{\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\cdots-1}\, dt}{(\vartheta + a^p \alpha t)^{\frac{l}{p}} (\vartheta + b^q \beta t)^{\frac{m}{q}} \cdots}$$

wobei sich die Integrationen links auf alle diejenigen lediglich positiven $x, y, z, \ldots$ erstrecken, welche der Bedingung

$$\varkappa > \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \cdots > \lambda$$

Genüge leisten. Als spezieller Fall ist bemerkenswerth $l = m = n = 1$, $p = q = r = 2$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, wobei wir nur eine dreifache Integration voraussetzen; es wird nämlich

$$\iiint_\lambda^\varkappa \frac{dx\, dy\, dz}{(\vartheta + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{3}{2})} \frac{abc}{8} \int_\lambda^\varkappa \frac{\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{(\vartheta + a^2 t)(\vartheta + b^2 t)(\vartheta + c^2 t)}}.$$

Substituirt man die bekannten Werthe von $\Gamma(\frac{1}{2})$ und $\Gamma(\frac{3}{2})$, setzt ferner $t = u^2$ und schreibt λ^2, $\varkappa^2$ für λ, $\varkappa$, so wird

$$\left.\begin{aligned} &\iiint_\lambda^\varkappa \frac{dx\, dy\, dz}{(\vartheta + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{2} abc \int_\lambda^\varkappa \frac{u^2\, du}{\sqrt{(\vartheta + a^2 u^2)(\vartheta + b^2 u^2)(\vartheta + c^2 u^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wobei sich links die Integrationen auf alle die positiven x, y, z beziehen, welche der Bedingung

$$\varkappa^2 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \geqq \lambda^2$$

genügen. Die Formel (6) dient übrigens unmittelbar zur Lösung einer physikalischen Aufgabe. Denkt man sich nämlich zwei concentrische und ähnliche Ellipsoide, von denen das eine die Achsen $a\lambda$, $b\lambda$, $c\lambda$ und das zweite grössere die Achsen $a\varkappa$, $b\varkappa$, $c\varkappa$ hat, so sind die Gleichungen ihrer Oberflächen:

$$\varkappa^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2.$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes innerhalb der von beiden Ellipsoiden begränzten Schicht, so ist $dx\,dy\,dz$ das entsprechende Volumenelement und, wenn Δ die Dichtigkeit im Punkte xyz bezeichnet, $\Delta\,dx\,dy\,dz$ das Massenelement. Aendert sich die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt, so muss Δ als Funktion von x, y, z gegeben sein, und das Einfachste ist, Δ als Funktion der Entfernung ϱ des Punktes xyz vom Mittelpunkte der Ellipsoide anzusehen. Diese Entfernung wird bekanntlich durch $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ausgedrückt, so dass also

$$\Delta = f(\varrho) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

eine bekannte Funktion sein muss. Nehmen wir beispielsweis

$$\Delta = f(\varrho) = \frac{1}{(\vartheta+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(\vartheta+x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

so dass also im Mittelpunkte die Dichtigkeit $\frac{1}{\vartheta^{\frac{1}{2}}}$ stattfinden würde und sie von da an nach aussen zu abnimmt, so ist jetzt:

$$\frac{dx\,dy\,dz}{(\vartheta + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

das Massenelement der ellipsoidischen Schicht. Die ganze Masse der letzteren erhalten wir jetzt durch dreifache Integration dieses Ausdrucks, wobei sich aber die Integrationen nur auf alle diejenigen positiven und negativen x, y, z beziehen dürfen, welche die Ungleichung

$$\varkappa^2 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \geqq \lambda^2$$

erfüllen, denn nur die der genannten Bedingung genügenden Coordinaten geben Elemente im Innern der fraglichen Schicht. Dehnen wir dagegen die Integrationen nur auf alle positiven, die obige Ungleichung befriedigenden x, y, z aus, so erhalten wir offenbar den zwischen den positiven Theilen der Coordinatenachsen liegenden Octanten des in Rede stehenden Körpers. Hier können wir nun die Formel (6) in Anwendung bringen und nehmen wir dann das Achtfache davon, so ist jetzt die Masse der ellipsoidischen Schicht:

$$4\pi abc \int_{\lambda}^{\varkappa} \frac{u^2\,du}{\sqrt{(\vartheta + a^2u^2)(\vartheta + b^2u^2)(\vartheta + c^2u^2)}}$$

und somit das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt.

Bemerkenswerth ist der Fall $\vartheta = 0$, wo die Dichtigkeit nach der dritten Potenz von ϱ nach Aussen zu abnimmt. Es wird dann sehr einfach die Masse

$$4\pi l\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right).$$

Für $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$ giebt der obige Ausdruck die Masse eines mit den Achsen a, b, c beschriebenen Ellipsoids, natürlich darf man in diesem Falle ϑ nicht $= 0$ setzen, weil sonst die Dichtigkeit im Mittelpunkte unendlich und folglich auch die Gesammtmasse unendlich werden würde.

§. 24.

Nicht ohne Interesse ist vielleicht das folgende Beispiel wegen der mehrfacheren Rücksichten, die man hier zu nehmen hat. Es sei nämlich das vielfache Integral zu reduziren

$$S = \iiint .. F\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + ..\right] dx\, dy \ldots \quad (1)$$

worin die Integrationen sich auf alle die wesentlich positiven x, y, z, .. beziehen mögen, die der Bedingung

$$\varkappa > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \ldots\ldots > \lambda$$

Genüge leisten. Setzen wir zur Abkürzung

$$s = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \ldots\ldots \quad (2)$$

und statt $F(s)$ das bestimmte Doppelintegral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos su\, du \int_\lambda^\varkappa F(t) \cos ut\, dt$$

welches für alle $s > \varkappa$ oder $< \lambda$ verschwindet, so tritt an die Stelle der Gleichung

$$S = \iiint .. F(s)\, dx\, dy\, dz \ldots\ldots, \quad \varkappa > s > \lambda$$

die folgende

$$S = \int\int_0^\varkappa\int .. dx\, dy\, dz .. \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos su\, du \int_\lambda^\varkappa F(t) \cos ut\, dt \quad (3)$$

wobei die Integrationen auf alle positiven x, y, z, ... ausgedehnt

worden sind. Statt dieses Integrales betrachten wir das nachstehende

$$S_1 = \frac{2}{\pi} \int \int_0^\infty \int .. \, dx \, dy \, dz \, .. \int_0^\infty e^{sui} \, du \int_\lambda^\varkappa F(t) \cos ut \, dt$$

von welchem S den reellen Bestandtheil ausmacht. Durch Umkehrung der Integrationsfolge wird nun

$$S_1 = \frac{2}{\pi} \int_\lambda^\varkappa F(t) \, dt \int_0^\infty \cos tu \, du \int \int_0^\infty \int .. \, e^{sui} \, dx \, dy \, dz \, ... \quad (4)$$

und wenn man sich an den Werth von s erinnert, so zerfällt das vielfache nach x, y, z, .. genommene Integral in ein bloses Produkt aus den Faktoren

$$\int_0^\infty e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right] ui} \, dx, \quad \int_0^\infty e^{\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2\right] ui} \, dy, \ \ldots$$

deren Werthe leicht auf folgende Weise zu finden sind. In dem allgemeinen Theoreme

$$\int_0^\infty f\left[h^2 x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right] dx = \frac{1}{h} \int_0^\infty f(2hk + x^2) \, dx$$

welches in §. 16 mitgetheilt worden ist, setze man

$$h = \frac{1}{a}, \quad k = a, \quad f(v) = e^{vui}$$

so ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2\right] ui} \, dx = a \int_0^\infty e^{\left(\frac{2a}{a} + x^2\right) ui} \, dx$$

$$= a \, e^{\frac{2a}{a} ui} \, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{\pi}{4} i}$$

indem man rechts eine schon im ersten Theile dieser Schrift vielfach benutzte Formel in Anwendung bringt. Ist nun n die Anzahl der Variablen $x, y, z, \ldots$ so wird das Produkt aus n Faktoren von obiger Form

$$= \frac{abc\ldots}{2^n}\left(\frac{\pi}{u}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\left(\frac{n\pi}{4}+\varrho u\right)i}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \frac{2\gamma}{c} + \ldots \tag{5}$$

gesetzt worden ist. Nach Nr. (4) haben wir nun weiter

$$S_1 = \frac{abc\ldots}{2^n}\pi^{\frac{n}{2}}\,\frac{2}{\pi}\int_\lambda^x F(t)\,dt\int_0^\infty \cos tu\,du\,\frac{1}{u^{\frac{n}{2}}}\,e^{\left(\frac{n\pi}{4}+\varrho u\right)i}$$

und da S hiervon die reelle Partie ausmacht

$$S = \frac{abc\ldots}{2^n}\pi^{\frac{n}{2}}\,\frac{2}{\pi}\int_\lambda^x F(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\cos tu}{u^{\frac{n}{2}}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\varrho u\right)du$$

oder kürzer

$$S = \frac{abc\ldots}{2^n}\pi^{\frac{n}{2}}\int_\lambda^x F(t)\,dt\,T \tag{6}$$

wobei die Bedeutung von T durch die Gleichung

$$T = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos tu}{u^{\frac{n}{2}}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\varrho u\right)du$$

bestimmt wird. Es ist nun nichts leichter als den Werth von T zu finden; man hat nämlich zuvörderst

$$T = \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\cos tu\cos\varrho u}{u^{\frac{n}{2}}}\,du - \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\cos tu\sin\varrho u}{u^{\frac{n}{2}}}\,du$$

und für $t > \varrho$ wird man hier

$$2\cos tu\cos\varrho u = \cos(t+\varrho)u + \cos(t-\varrho)u$$
$$2\cos tu\sin\varrho u = \sin(t+\varrho)u - \sin(t-\varrho)u$$

dagegen für $t < \varrho$

$$2\cos tu\cos\varrho u = \cos(\varrho+t)u + \cos(\varrho-t)u$$
$$2\cos tu\sin\varrho u = \sin(\varrho+t)u + \sin(\varrho-t)u$$

setzen und dann die einzelnen Glieder nach den für lediglich positive r geltenden Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos ru}{u^\mu}\,du = \frac{\pi r^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ru}{u^\mu}\,du = \frac{\pi r^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}$$

integriren. Man erhält so, ohne die mindeste Schwierigkeit,

$$T = 0, \quad \text{für } t < \varrho$$
$$= \frac{(t-\varrho)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{für } t > \varrho.$$

Wollen wir diess in die Gleichung (6) substituiren, so sind drei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $\varrho > x$ ist, oder ϱ zwischen x

und λ liegt, oder endlich $\varrho < \lambda$ ist. Im ersten Falle hat man wegen $t < \varkappa$ um so mehr $t < \varrho$, mithin $T = 0$, und

$$S = 0, \quad \text{für} \quad \varrho > \varkappa \tag{7}$$

im zweiten zerlege man das Intervall von $\varkappa$ bis herab zu λ in zwei andere von $\varkappa$ bis ϱ und ϱ bis λ; dann ist im ersten Intervalle $t > \varrho$ und im zweiten $t < \varrho$, mithin verschwindet der letztere Bestandtheil des Integrales in (6) und es bleibt

$$S = \frac{abc\,..}{2^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\varrho}^{\varkappa} F(t)\,(t-\varrho)^{\frac{n}{2}-1}\,dt, \quad \varkappa > \varrho > \lambda. \tag{8}$$

Ist endlich $\varrho < \lambda$, so ist wegen $t > \lambda$ um so mehr $t > \varrho$, folglich

$$S = \frac{abc\,..}{2^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,(t-\varrho)^{\frac{n}{2}-1}\,dt, \quad \varrho > \lambda, \tag{9}$$

und so ist in jedem Falle das vielfache Integral (1) auf ein einfaches reduzirt.

Nehmen wir beispielsweis $n = 3$, $F(t) = 1$, $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, so wird für

$$1 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 > 0$$

$$\iiint dx\,dy\,dz = 0, \quad \text{für} \quad \varrho > 1$$

$$= \frac{\pi}{b}\,abc\,(1-\varrho)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{für} \quad 1 > \varrho > 0\ ^*),$$

---

*) Der dritte Fall $\varrho < \lambda$, d. i. $\varrho < 0$, kann hier nicht eintreten, weil die Gleichung unserer Fläche für negative a, b, .. α, β, .. die nämliche bleibt, wie für positive Werthe dieser Constanten, und man folglich a, b, c, .. α, β, γ, .. nur als positiv und ϱ daher nicht als negativ ansehen kann.

und diess ist ein Octant desjenigen Volumens, welches von der durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 = 1$$

charakterisirten Fläche umschlossen wird. Für $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ wird $\varrho = 0$ und man kommt dann auf die Cubatur des Ellipsoids zurück.

§. 25.

Ein paar andere Reduktionen vielfacher Integrale ergeben sich nach derselben Methode auf folgende Weise.

I. Sei zunächst

$$S = \iiint \ldots e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots)} F(x + y + \ldots)\, dx\, dy \ldots \qquad (1)$$

und die Bedingung gestellt, dass die Integrationen sich auf alle diejenigen positiven und negativen x, y, z, .. erstrecken, welche der Ungleichung

$$\varkappa > x + y + z + \ldots > \lambda$$

genügen. Bezeichnen wir wieder $x + y + \ldots$ mit s, so ist ganz ähnlich, wie früher

$$S = \iiint \ldots e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots)}\, dx\, dy \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su\,t}\, du \int_{\lambda}^{\varkappa} F(t) \cos ut\, dt$$

und da das letzte Doppelintegral immer verschwindet, wenn nicht $\varkappa > s > \lambda$ ist, so können wir jetzt die Integrationen nach x, y, z, ..

auf das Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen. Kehren wir zugleich die Integrationsordnung um, so wird

$$S = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\pi} F(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\,du \ \ldots$$

$$\ldots \int\int_{-\infty}^{\infty}\int \ldots e^{-(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\ldots)}\, e^{-su\,i}\,dx\,dy \ldots \quad (2)$$

Vermöge des Werthes von s zerfällt die vielfache Integration nach x, y, z, .. in das Produkt der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2x^2}\, e^{-ux\,i}\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2y^2}\, e^{-uy\,i}\,dy\,, \ \ldots$$

Es ist aber, wie man leicht übersieht,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\tau^2}\, e^{-u\tau\,i}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\tau^2}\cos u\tau\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{k}\, e^{-\left(\frac{u}{2k}\right)^2}$$

und folglich wird das Produkt jener nach x, y, z, .. genommenen Integrale

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, e^{-\left(\frac{u}{2\alpha}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\, e^{-\left(\frac{u}{2\beta}\right)^2} \ \ldots.$$

d. i. wenn wir voraussetzen, dass die Anzahl der Variablen x, y, z, ... durch n ausgedrückt wird

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\alpha\beta\gamma\ldots}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\ldots\right)u^2}$$

wo zur Abkürzung:

$$\varrho^2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \ldots . \tag{3}$$

sein möge. Die Gleichung (2) giebt dann:

$$S = \frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\alpha\beta\gamma\ldots} \int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos tu\,du\, e^{-\frac{1}{4}\varrho^2 u^2}.$$

Hier lässt sich wieder die Integration nach u ausführen und giebt

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\varrho} e^{-\left(\frac{t}{\varrho}\right)^2}$$

folglich, wenn wir die erste und letzte Form von S vergleichen,

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \ldots e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots)} F(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots \\ &\quad = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\gamma\ldots}\,\frac{1}{\varrho}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\, e^{-\left(\frac{t}{\varrho}\right)^2} dt \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei die Integrationen links sich auf alle die positiven und negativen x beziehen, für welche $\varkappa > x+y+\ldots > \lambda$ ist.

Man kann hieraus gleich noch ein zweites bemerkenswerthes Theorem ableiten, worin statt der Exponentialgrösse ein algebraischer Ausdruck vorkommt. Schreibt man nämlich $\alpha\sqrt{\omega}$, $\beta\sqrt{\omega}$, .. für α, β, .., so tritt $\frac{\varrho}{\sqrt{\omega}}$ an die Stelle von ϱ und es wird

$$\begin{aligned} &\iiint \ldots e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots)\omega} F(x+y+\ldots)\,dx\,dy\ldots \\ &\quad = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\gamma\ldots}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\omega}}{(\sqrt{\omega})^n}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\, e^{-\left(\frac{t}{\varrho}\right)^2 \omega}\, dt . \end{aligned}$$

Diese Gleichung werde mit

$$\omega^{\mu-1} e^{-\omega}\, d\omega$$

multiplizirt und zwischen den Gränzen $\omega = 0$, $\omega = \infty$ integrirt. Auf der linken Seite erscheint dann ausser den Integrationen nach x, y, z, .. noch die folgende

$$\int_0^\infty \omega^{\mu-1} e^{-(1+\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+..)\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)}{(1+\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+\ldots)^\mu}$$

und auf der rechten Seite tritt zu der Integration in Bezug auf t noch diese hinzu

$$\int_0^\infty \omega^{\mu-\frac{n-1}{2}-1} e^{-\left(1+\frac{t^2}{\varrho^2}\right)\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{\Gamma\left(\mu-\frac{n-1}{2}\right)}{\left(1+\frac{t^2}{\varrho^2}\right)^{\mu-\frac{n-1}{2}}}.$$

Man gelangt so zu der Gleichung

$$\Gamma(\mu) \int\int\int .. \frac{F(x+y+..)\, dx\, dy\, ..}{(1+\alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+..)^\mu}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha\beta\gamma\, ..} \frac{\Gamma\left(\mu-\frac{n-1}{2}\right)}{\varrho} \int_\lambda^\infty \frac{F(t)\, dt}{\left(1+\frac{t^2}{\varrho^2}\right)^{\mu-\frac{n-1}{2}}}$$

die sich in die folgende elegante Gestalt bringen lässt:

$$\left.\begin{aligned}&\iiint \ldots \frac{F(x+y+..)\,dx\,dy\,..}{(1+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+..)^{\mu}}\\ &=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\varrho^{2\mu-n}}{\alpha\beta\gamma\ \ldots}\,\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)}\int_{\lambda}^{\varkappa}\frac{F(t)\,dt}{(\varrho^2+t^2)^{\mu-\frac{n-1}{2}}}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

wobei ϱ seine frühere, durch Nr. (3) festgestellte Bedeutung hat und hinsichtlich der positiven und negativen x, y, z, .. die Bedingung $\varkappa > x+y+..> \lambda$ stattfinden muss.

II. Sei für ein zweites Beispiel

$$S=\iiint \ldots \frac{F(x+y+..)\,dx\,dy\,..}{(\alpha^2+x^2)\,(\beta^2+y^2)\ \ldots.}\qquad(6)$$

worin sich die Integrationen, wie unter I., auf alle die positiven oder negativen x, y, z, .. erstrecken sollen, welche der Ungleichung $\varkappa > x+y+..> \lambda$ Genüge leisten. Berücksichtigt man, dass für $x+y+..=s$ der reelle Bestandtheil von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{\varkappa i}\,du\int_{\lambda}^{\varkappa}F(t)\cos ut\,dt$$

$=F(s)$ oder $=0$ ist, je nachdem s innerhalb oder ausserhalb des Intervalles λ bis $\varkappa$ liegt, so kann man S als die reelle Partie von

$$\iiint \ldots \frac{dx\,dy\,..}{(\alpha^2+x^2)\,(\beta^2+y^2)\,..}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{\varkappa i}\,du\int_{\lambda}^{\varkappa}F(t)\cos ut\,dt$$

ansehen und hier die Integrationen von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, $y=-\infty$ bis $y=+\infty$ etc. ausdehnen.

Bei gleichzeitiger Aenderung der Integrationsfolge geht das vorstehende Integral über in

$$\frac{2}{\pi}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du \int\int_{-\infty}^{\infty} \int .. \frac{e^{sui}\,dx\,dy\,..}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)\,..}.$$

Vermöge der Bedeutung von s reduziren sich die Integrationen nach x, y, z, .. auf das Produkt der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{uxi}\,dx}{\alpha^2+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{uyi}\,dy}{\beta^2+y^2}, \ldots$$

und dieses Produkt ist

$$\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha u}\cdot\frac{\pi}{\beta}e^{-\beta u}\cdot\frac{\pi}{\gamma}e^{-\gamma u}\ldots$$

$$=\frac{\pi^n}{\alpha\beta\gamma\,..}e^{-(\alpha+\beta+\gamma+..)u}$$

wo n die Anzahl der Variablen x, y, z bezeichnet. Das vorige vielfache Integral wird jetzt

$$\frac{2\pi^{n-1}}{\alpha\beta\gamma\,..}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,dt \int_{0}^{\infty} \cos tu\,du\,e^{-(\alpha+\beta+\gamma+..)u}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=\varrho \tag{7}$$

gesetzt wird

$$=\frac{2\pi^{n-1}}{\alpha\beta\gamma\,..}\int_{\lambda}^{\varkappa} F(t)\,dt\,\frac{\varrho}{\varrho^2+t^2}.$$

Der reelle Theil hiervon würde S sein, da aber das vorstehende Integral gar keine imaginäre Partie besitzt, so ist

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\int \ldots \frac{F(x+y+..)\,dx\,dy\,..}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+y^2)\ldots.}\\&= \frac{2\pi^{n-1}\varrho}{\alpha\beta\gamma\,..}\int_\lambda^\varkappa \frac{F(t)}{\varrho^2+t^2}\,dt\,.\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Für alle Formeln dieses Paragraphen ist übrigens zu bemerken, dass man sie nicht in dem Falle, wo nur eine Variable vorkommt, brauchen darf. Die Integrationen zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ setzen nämlich voraus, dass es auch möglich sei x, y, .. negativ zu nehmen, diess kann aber, wenn nur x allein vorhanden ist bei positiven λ und $\varkappa$, wegen der Bedingung $\varkappa > x > \lambda$ nicht geschehen. Natürlich vermindert diese Beschränkung den Werth unserer Formeln nicht, da man sie für $n=1$ ohnehin nicht benutzen wird.

§. 26.

Die Integrale, welche wir bisher betrachtet haben, boten für die Anwendung des Fourier'schen Theorems und der Dirichlet'schen Integrationsmethode den besonderen Vortheil dar, dass die Grösse, welche in der Bedingungsungleichung die mittelste Stelle einnimmt, zugleich die Variable der willkührlichen, im Integrale vorkommenden Funktion ausmacht; dieser Umstand erlaubte den Diskontinuitätsfaktor mit dem Doppelintegrale, in welches die beliebige Funktion verwandelt wird, zu verschmelzen. Findet dagegen jener günstige Fall nicht statt, so bedarf es ausser der Substitution für die Funktion noch eines besonderen Diskontinuitätsfaktors, so dass also zu den vorhandenen Integrationen noch drei neue hinzutreten. Wir wollen diess an dem folgenden Beispiele zeigen.

Es sei das zu reduzirende n Variable enthaltende Integral:

$$S = \iiint .. F(x+y+z+..)\,dx\,dy\,dz\,.. \qquad (1)$$

mit der Bedingung gegeben, die Integrationen auf alle diejenigen positiven und negativen x, y, z, .. auszudehnen, welche der Bedingung

$$1 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \ldots\ldots > 0$$

Genüge leisten. Bezeichnen wir hier $x + y + z + \ldots$ mit s, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + ..$ mit σ, und erinnern uns, dass der reelle Bestandtheil von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,e^{\sigma\omega i}\,d\omega$$

$= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem σ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 liegt, so können wir S als die reelle Partie von

$$S' = \iiint .. F(s)\,dx\,dy\,..\,\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,e^{\sigma\omega i}\,d\omega$$

ansehen und hier die Integrationen auf die Gränzen $-\infty\ +\infty$ ausdehnen. Nach Umkehrung der Integrationsfolge wird das vorstehende Integral

$$S' = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega \int\int_{-\infty}^{\infty}\int .. F(s)\,e^{\sigma\omega i}\,dx\,dy\,\ldots$$

Da sich hier die Integrationen nach x, y, z, .. noch nicht ausführen lassen, so benutzen wir noch die Formel

$$F(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s-t)ui}\,F(t)\,dt$$

wodurch jetzt S' die Form

$$S' = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega \int\int_{-\infty}^{\infty}\int \ldots dx\,dy \ldots e^{\sigma\omega i}$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s-t)ui} F(t)\,dt$$

annimmt. Durch Umkehrung der Integrationsordnung wird hieraus

$$S' = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tui}\,du \int\int_{-\infty}^{\infty}\int \ldots e^{(\sigma\omega+su)i}\,dx\,dy \ldots$$

Setzt man für σ und s ihre Werthe, so zerlegt sich die vielfache Integration nach x, y, z, .. und das Produkt der n Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2\omega + xu\right]i} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2\omega + yu\right]i} dy, \ldots$$

deren Werthe leicht anzugeben sind; dieselben heissen nämlich

$$\frac{\sqrt{\pi}\,a}{\sqrt{\omega}} e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{4}\frac{a^2}{\omega}u^2}, \quad \frac{\sqrt{\pi}\,b}{\sqrt{\omega}} e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{4}\frac{b^2}{\omega}u^2}, \ldots$$

und ihr Produkt ist

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,abc\ldots}{\omega^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{1}{4}n\pi i - \frac{1}{4}\frac{r^2}{\omega}u^2}$$

wobei zur Abkürzung

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots \qquad (2)$$

gesetzt wurde. Durch Substitution jenes Werthes wird nun

$$S = \pi^{\frac{n-4}{4}} e^{\frac{1}{4}n\pi i} abc \ldots$$

$$\ldots \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n}{2}+1}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{4}\frac{r^2}{\omega}u^2 + tu\right)i} du .$$

Die Ausführung der Integrationen nach u verwandelt dieses dreifache Integral in das doppelte

$$S = 2\pi^{\frac{n-3}{2}} e^{\frac{n-1}{4}\pi i} \frac{abc\,..}{r} \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{\frac{\omega t^2}{r^2} i}\, dt$$

oder

$$S = 2\pi^{\frac{n-3}{2}} e^{\frac{n-1}{4}\pi i} \frac{abc\,..}{r} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}} e^{\frac{t^2}{r^2}\omega i} d\omega.$$

Die reelle Partie hiervon ist

$$S = \pi^{\frac{n-3}{2}} \frac{abc\,..}{r} \ldots.$$

$$\ldots. \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^{\frac{n+1}{2}}} 2\sin\omega\cos\left(\frac{n-1}{4}\pi + \frac{t^2}{r^2}\omega\right) .$$

Der Werth des nach ω genommenen Integrales kann leicht dadurch entwickelt werden, dass man den Cosinus auflöst und das Integral in vier andere zerlegt, deren Werthe nach den Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{\sin k\omega}{\omega^\mu}\, d\omega = \frac{\pi\, k^{\mu-1}}{2\,\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos k\omega}{\omega^\mu}\, d\omega = \frac{\pi\, k^{\mu-1}}{2\,\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}$$

bestimmbar sind. Da hier aber k als lediglich positiv vorausgesetzt wird, so muss man die Fälle unterscheiden, in welchen $1-\frac{t^2}{r^2}$ positiv oder negativ ist, und im letzteren $-\left(\frac{t^2}{r^2}-1\right)$ dafür schreiben. Man findet auf diese Weise ohne Schwierigkeit, dass der Werth des in Rede stehenden Integrales

$$= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(1-\frac{t^2}{r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \text{oder} = 0$$

ist, je nachdem $1-\frac{t^2}{r^2}$ positiv oder negativ ausfällt, oder was auf das Nämliche hinauskommt, je nachdem t innerhalb oder ausserhalb des Intervalles $-r$ bis $+r$ liegt.

Zerlegt man nun das nach t genommene Integral in drei andere

$$\text{von } -\infty \text{ bis } -r, \quad -r \text{ bis } +r, \quad +r \text{ bis } +\infty$$

so ist im ersten und letzten Integrale $1-\frac{t^2}{r^2}$ negativ und folglich verschwinden beide Integrale; demnach bleibt blos das mittelste stehen, in welchem $1-\frac{t^2}{r^2}$ positiv ist, und es wird

$$S = \pi^{\frac{n-3}{2}}\,\frac{abc\,..}{r}\int_{-r}^{+r} F(t)\,dt\cdot\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(1-\frac{t^2}{r^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

wo man noch $t = r\tau$ setzen kann. Vermöge des ursprünglichen Werthes von S ergiebt sich nun, dass für positive und negative, die Bedingung

$$1 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \ldots\ldots > 0$$

erfüllende $x, y, z, \ldots$ die Gleichung besteht:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint \ldots F(x+y+z+\ldots)\,dx\,dy\,dz\,\ldots \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\,abc\,\ldots}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} F(r\tau)\,(1-\tau^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dr\,. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diese Formel löst unter Anderem die Aufgabe, die Masse eines dreiachsigen Ellipsoids zu bestimmen, in welchem die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt veränderlich und zwar als Funktion der Coordinatensumme jener Punkte gegeben ist.

§. 27.

Von besonderem Interesse ist noch die Thatsache, dass sich durch einen sehr einfachen Mechanismus aus jeder Reduktionsformel für ein vielfaches Integral eine unzählige Menge anderweiter Formeln derselben Art herleiten lassen, deren Allgemeinheit nicht geringer ist, als der bisher aufgestellten. Das Verfahren selbst wird aus der folgenden Betrachtung erhellen.

Wir setzen voraus, man kenne den Werth eines vielfachen Integrales bereits, und es sei etwa

$$U = \iiint \ldots \Phi(x, y, z, \ldots)\,dx\,dy\,dz\,\ldots \qquad (1)$$

Hierbei mögen die Integrationen sich auf alle diejenigen wesentlich positiven x, y, z, .. beziehen, welche der Bedingung

$$1 > \varphi(u, x, y, z, \ldots) > 0 \qquad (2)$$

genügen, in derselben soll u eine willkührliche Constante bezeichnen, von der wir jedoch voraussetzen, dass sie nicht in Φ vorkomme. Vermöge des Dirichlet'schen Diskontinuitätsfaktors sind wir berechtigt, das Integral U als den reellen Bestandtheil des folgenden anzusehen

$$\iiint \ldots \Phi(x, y, \ldots)\, dx\, dy \, \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} e^{\varphi(u, x, y, \ldots)\omega i}\, d\omega$$

und in dem letzteren die Integrationen nach x, y, z, .. auf das Intervall 0 bis ∞ auszudehnen. In so fern U von u abhängt — denn die letztere Grösse hilft in (1) die Integrationsgränzen bestimmen — so können wir auch beiderseits nach u differenziren und integriren, und es wäre z. B.

$$\int_\varepsilon^\eta u \frac{dU}{du}\, du \quad \text{oder} \quad \int_\varepsilon^\eta u\, d_u U$$

offenbar gleich dem reellen Bestandtheile von

$$\int_\varepsilon^\eta u\, d_u \left\{ \int \int_0^\infty \int \ldots \Phi(x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} e^{\varphi(u, x, y, \ldots)\omega i}\, d\omega \right\}.$$

Da sich aber die angedeutete Differenziation und Integration nur auf u bezieht und diese Grösse erst in dem nach ω genommenen Integrale vorkommt, so ist der obige Ausdruck auch:

$$= \int\int_0^\infty\int .. \Phi(x, y, ..)\, dx\, dy \ \ldots$$

$$\ldots \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega \int_\varepsilon^\eta u\, dl\, e^{\varphi(u, x, y, ..)\,\omega i}$$

wobei wir das Doppelintegral nach u und ω mit R bezeichnen wollen. Führen wir statt u eine neue Variable v der Art ein, dass

$$\varphi(u, x, y, \ldots) = v \tag{3}$$

so ist offenbar umgekehrt auch u eine Funktion von v, etwa

$$u = \psi(v, x, y, \ldots) \tag{4}$$

wenn ferner u die Werthe ε und η angenommen hat, ist $v = \varphi(\varepsilon, x, y, ..)$ und $v = \varphi(\eta, x, y, ..)$ geworden. Das Doppelintegral R geht jetzt in das folgende über:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\, d\omega \int_{\varphi(\varepsilon, x, y, ..)}^{\varphi(\eta, x, y, ..)} \psi(v, x, y, ..)\, dl\, e^{v\omega i}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega\, d\omega \int_{\varphi(\varepsilon, x, y, ..)}^{\varphi(\eta, x, y, ..)} \psi(v, x, y, ..)\, i\, e^{\omega v i}\, dv .$$

Hiervon ist die reelle Partie, die wir allein brauchen

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega\, d\omega \int_{\varphi(\varepsilon, x, y, ..)}^{\varphi(\eta, x, y, ..)} \psi(v, x, y, ..) \sin\omega v\, dv$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega\, d\omega \int_{\varphi(\eta, x, y, ..)}^{\varphi(\varepsilon, x, y, ..)} \psi(v, x, y, ..) \sin\omega v\, dv .$$

Zufolge des Fourier'schen Theoremes ist der Werth dieses Doppelintegrales

$$= \psi(1, x, y, ..), \text{ wenn } \varphi(\varepsilon, x, y, ..) > 1 > \varphi(\eta, x, y, ..)$$
$$= 0 \quad , \text{ wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.}$$

Substituiren wir diess, so folgt jetzt

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} u\, d_u U = \int\int_{0}^{\infty}\int .. \Phi(x, y, ..) R\, dx\, dy \ ...$$

wo für R entweder $\psi(1, x, y, ..)$ oder Null zu setzen ist, je nachdem die obengenannte Bedingung erfüllt oder nicht erfüllt ist. Denken wir uns das Integral nach $x, y, z, ..$ in seine Elemente zerlegt, so scheidet der Faktor R alle diejenigen Elemente aus, für welche nicht $\varphi(\varepsilon, x, y, ..) > 1 > \varphi(\eta, x, y, ..)$ ist, und wir können demnach die Gleichung

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} u\, d_u U = \iiint .. \Phi(x, y, ..)\, \psi(1, x, y, ..)\, dx\, dy\, .. \quad (5)$$

mit der Bedingung aufstellen, dass sich die Integrationen rechts nur auf die $x, y, z, ..$ beziehen sollen, welche der Ungleichung

$$\varphi(\varepsilon, x, y, ..) > 1 > \varphi(\eta, x, y, ..) \quad (6)$$

Genüge leisten.

Mit welcher Leichtigkeit dieses Theorem zu neuen und sehr allgemeinen Reduktionsformeln führt, wird das folgende Beispiel zeigen. Wenn sich die Integrationen nach $x, y, z, ..$ auf alle positiven, der Bedingung

$$1 > \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \ldots > 0$$

genügenden Werthe jener Variablen beziehen, so ist

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} .. dx\, dy\, .. = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m) \ldots}{\Gamma(1+l+m+..)} a^{l} b^{m} \ldots$$

Setzen wir

$$a = \frac{f(u)-1}{f(u)-\alpha}, \quad b = \frac{f(u)-1}{f(u)-\beta}, \ldots .$$

so wird

$$\iiint \ldots x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\ldots}{\Gamma(1+l+m+\ldots)} \left(\frac{f(u)-1}{f(u)-\alpha}\right)^{l} \left(\frac{f(u)-1}{f(u)-\beta}\right)^{m} \ldots .$$

und wenn wir diess mit der früheren Bezeichnung zusammenhalten wollen, so müssen wir die rechte Seite dieser Gleichung U nennen und

$$\varphi(u, x, y, \ldots) = \frac{f(u)-\alpha}{f(u)-1} x + \frac{f(u)-\beta}{f(u)-1} y + \ldots = v$$

setzen. Daraus ergiebt sich zunächst

$$f(u) = \frac{v - \alpha x - \beta y - \ldots}{v - x - y - \ldots .}$$

und auch u selbst, wenn wir F die Umkehrung von f nennen, so dass aus einer Gleichung, wie $f(p) = q$, $p = F(q)$ folgt; es wird nämlich

$$u = F\left(\frac{v - \alpha x - \beta y - \ldots}{v - x - y - \ldots}\right)$$

und diess ist zugleich das frühere $\Psi(v, x, y, \ldots)$. Vermöge dieses Werthes und der Bedeutung von U und $\Phi(x, y, \ldots) = x^{l-1} y^{m-1} \ldots$ ergiebt sich jetzt nach Nr. (5):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,..}{\Gamma(1+l+m+..)}\int_{\varepsilon}^{\eta} u\,d\Big[\Big(\frac{f(u)-1}{f(u)-\alpha}\Big)^{l}\Big(\frac{f(u)-1}{f(u)-\beta}\Big)^{m}\ldots\Big]\\ &=\iiint..x^{l-1}y^{m-1}..\,F\Big(\frac{1-\alpha x-\beta y-\ldots}{1-x-y-\ldots}\Big)\,dx\,dy\ldots\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

wobei sich die Integrationen auf alle diejenigen positiven $x, y, z, ..$ erstrecken, welche der Bedingung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{f(\varepsilon)-\alpha}{f(\varepsilon)-1}x+\frac{f(\varepsilon)-\beta}{f(\varepsilon)-1}y+\ldots\ldots>1\\ 1>&\frac{f(\eta)-\alpha}{f(\eta)-1}x+\frac{f(\eta)-\beta}{f(\eta)-1}y+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Genüge leisten. Das Integral auf der linken Seite ist noch einer einfachen Transformation fähig; führen wir nämlich statt u eine neue Variable t der Art ein, dass $f(u)=t$, folglich nach der Bedeutung von F umgekehrt $u=F(t)$ ist, so nimmt t die Werthe $f(\varepsilon)$ und $f(\eta)$ an, wenn $u=\varepsilon$ und $u=\eta$ geworden ist, und wir erhalten statt der linken Seite von (7)

$$K\int_{f(\varepsilon)}^{f(\eta)}F(t)\,d\Big[\Big(\frac{t-1}{t-\alpha}\Big)^{l}\Big(\frac{t-1}{t-\beta}\Big)^{m}\ldots\Big]$$

wobei K zur Abkürzung dient, nämlich

$$K=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+l+m+n+\ldots)}.\qquad(9)$$

Die noch auszuführende Differenziation nach t hat durchaus keine Schwierigkeiten und wird sehr leicht, wenn man dazu die Formeln $dw=w\,dlw$ benutzt. Nimmt man noch $f(\varepsilon)=\lambda$, $f(\eta)=\varkappa$, wo λ

und $\varkappa$ ganz beliebig sind, weil ϵ und η es waren, so gelangen wir zu der Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\int \ldots x^{l-1} y^{m-1} \ldots F\left(\frac{1-\alpha x-\beta y-\ldots}{1-x-y-\ldots}\right) dx\, dy \ldots \\ &= K \int_{\lambda}^{\varkappa} \frac{(t-1)^{l+m+\ldots-1}}{(t-\alpha)^{l}(t-\beta)^{m}\ldots}\left[\frac{1-\alpha}{t-\alpha} l + \frac{1-\beta}{t-\beta} m + \ldots\right] F(t)\, dt\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

in welcher sich die Integrationen links auf alle diejenigen wesentlich positiven x, y, z, ... beziehen, welche der Ungleichung

$$\frac{\lambda-\alpha}{\lambda-1} x + \frac{\lambda-\beta}{\lambda-1} y + \ldots > 1 > \frac{\varkappa-\alpha}{\varkappa-1} x + \frac{\varkappa-\beta}{\varkappa-1} y + \ldots$$

Genüge leisten. Hier ist ein besonderer Fall noch bemerkenswerth; setzen wir nämlich $\lambda = 1$, $\varkappa = \infty$, und nehmen an, dass $\lambda = 1 < \alpha$, ebenso $1 > \beta$ etc. sei, so geht unsere Bedingung in

$$\infty > 1 > x + y + z + \ldots$$

über, deren erster Theil von selbst erfüllt ist. Rechnen wir hierzu, dass wegen der positiven x, y, .. immer $x + y + \ldots > 0$ sein muss, so haben wir jetzt das Theorem

$$\left.\begin{aligned}&\int\int\int \ldots x^{l-1} y^{m-1} \ldots F\left(\frac{1-\alpha x-\beta y-\ldots}{1-x-y-\ldots}\right) dx\, dy \ldots \\ &= K \int_{1}^{\infty} \frac{(t-1)^{l+m+\ldots-1}}{(t-\alpha)^{l}(t-\beta)^{m}\ldots}\left[\frac{1-\alpha}{t-\alpha} l + \frac{1-\beta}{t-\beta} m + \ldots\right] F(t)\, dt\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

wobei $\alpha < 1$, $\beta < 1$, .. und hinsichtlich der auf blos positive Werthe von x, y, .. sich erstreckenden Integration die Bedingung

$$1 > x + y + z + \ldots > 0 \quad (12)$$

erfüllt sein muss. Etwas allgemeiner wird dieses Theorem dadurch,

dass man x^p, y^q, ... an die Stelle von x, y, ... ferner $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{q}$, .. für l, m, .. und zur Abkürzung

$$M = \frac{1}{pq..} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)..}{\Gamma\left(1+\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+..\right)} \tag{12}$$

$$k = \frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} + \ldots - 1 \tag{13}$$

setzt. Es wird dann

$$\left.\begin{aligned} &\int\int\int .. x^{l-1} y^{m-1} .. F\left(\frac{1-\alpha x^p - \beta y^q - ..}{1 - x^p - y^q - \ldots}\right) dx\, dy .. \\ &= M \int_1^\infty \frac{(t-1)^k F(t)\, dt}{(t-\alpha)^{\frac{l}{p}} (t-\beta)^{\frac{m}{q}} \ldots} \left(\frac{l}{p}\frac{1-\alpha}{t-\alpha} + \frac{m}{q}\frac{1-\beta}{t-\beta} + ..\right) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

wobei sich die Integrationen links auf alle positiven, der Ungleichung

$$1 > x^p + y^q + z^r + \ldots > 0 \tag{15}$$

Genüge leistenden x, y, z, .. beziehen. Zu bemerken ist noch, dass man in dieser Formel $F(t)$ nicht constant nehmen darf, weil $F(t)$ die Umkehrung einer anderen Funktion (f) war.

Eine interessante Anwendung der Formel (14) ist die Complanation des dreiachsigen Ellipsoids, wenn man für dieselbe von der bekannten Formel

$$S = \int\int dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

ausgeht. Die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids ist nämlich

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

und wenn man hier $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ entwickelt, so wird

$$S = \iint dx\,dy \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

und hier müssen die Integrationen auf alle die positiven und negativen x und y bezogen werden, welche der Bedingung

$$1 \geqq \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \geqq 0$$

erfüllen. Beschränken wir uns auf blos positive x und y, so erhalten wir den Octanten der Oberfläche des Ellipsoids. Ausserdem können wir ax und by für x und y setzen und zur Abkürzung

$$1 - \frac{c^2}{a^2} \text{ und } 1 - \frac{c^2}{b^2} \text{ mit } \varepsilon^2 \text{ und } \eta^2$$

bezeichnen, wo ε und η die beiden Excentricitäten des Ellipsoids sind. Die ganze Oberfläche des in Rede stehenden Körpers wird jetzt durch

$$8 \iint dx\,dy \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2 - \eta^2 y^2}{1 - x^2 - y^2}}$$

ausgedrückt, wobei sich die Integrationen auf alle positiven, der Bedingung

$$1 \geqq x^2 + y^2 \geqq 0$$

unterworfenen x und y beziehen. Diese Integration lässt sich nach

der Formel (15) ausführen, wenn man $F(t) = \sqrt{t}$, $l = m = 1$, $p = q = 2$, $\alpha = \varepsilon^2$, $\beta = \eta^2$ setzt und nur zwei Variable zulässt. Der Werth von M ist dann

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^2}{\Gamma(2)} = \tfrac{1}{4}\pi$$

und der von $k = 0$, mithin die gesuchte Oberfläche,

$$8 \cdot \tfrac{1}{4}\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{\sqrt{(t-\varepsilon^2)(t-\eta^2)}} \left[\tfrac{1}{2} \frac{1-\varepsilon^2}{t-\varepsilon^2} + \tfrac{1}{2} \frac{1-\eta^2}{t-\eta^2}\right]$$

oder wenn man t^2 für t setzt

$$2\pi \int_1^\infty \frac{t^2\, dt}{\sqrt{(t^2-\varepsilon^2)(t^2-\eta^2)}} \left[\frac{1-\varepsilon^2}{t^2-\varepsilon^2} + \frac{1-\eta^2}{t^2-\eta^2}\right].$$

Hierbei muss noch $\varepsilon^2 < 1$ und $\eta^2 < 1$ sein (wie früher α und β), was aber der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, da man nur für c die kleinste der drei Achsen des Ellipsoids zu nehmen braucht, um sogleich jene Bedingung zu erfüllen.

Ueberblicken wir am Schlusse noch einmal die gewonnenen Resultate und beachten vorzüglich die Allgemeinheit der Formen, durch die sie sich besonders auszeichnen, so kann wohl kein Zweifel darüber sein, dass hier noch ein grosses Feld der Thätigkeit gewandter Analytiker offen liegt. Möge der geneigte Leser, welcher uns bis an diese Stelle zu folgen die Güte gehabt hat, sich zur Bearbeitung desselben aufgelegt fühlen!

Anhang.

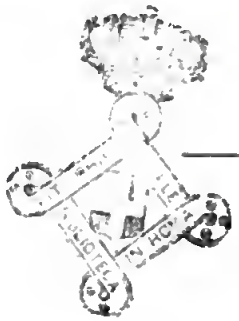
Um die numerische Berechnung derjenigen Integrale zu erleichtern, welche auf eine der transscendenten Funktionen $Ei(x)$, $Ci(x)$ und $Si(x)$ führen (§. 21), theilen wir eine von Herrn Professor Bretschneider in Gotha berechnete kleine Tafel dieser Transscendenten mit:

x	$Ei(x)$				
1	+	1,89511	78163	55936	75546
2	+	4,95423	43560	01890	16337
3	+	9,93383	25706	25416	55800
4	+	19,63087	44700	56220	02264
5	+	40,18527	53558	03177	45509
6	+	85,98976	21424	39204	80358
7	+	191,50474	33355	01395	95306
8	+	440,37989	95348	38268	99742
9	+	1037,87829	07170	89587	65757
10	+	2492,22897	62418	77759	13844

x	$Ei(-x)$				
1	−	0,21938	39343	95520	27367
2	−	0,04890	05107	08061	11956
3	−	0,01304	83810	94197	03741
4	−	0,00377	93524	09848	90647
5	−	0,00144	82955	91257	32579
6	−	0,00036	00824	52162	65865
7	−	0,00011	54817	31610	33821
8	−	0,00003	76656	22843	92490
9	−	0,00001	24473	54178	00627
10	−	0,00000	41569	68929	68532

x	$Ci(x)$				
1	+	0,33740	39229	00968	13466
2	+	0,42298	08287	74864	99569
3	+	0,11962	97860	08000	32762
4	−	0,14098	16978	86930	41163
5	−	0,19002	97496	56643	87861
6	−	0,06805	72438	93247	12620
7	+	0,07669	52784	82184	51838
8	+	0,12243	38825	32009	55729
9	+	0,05534	75313	33133	60708
10	−	0,04545	64330	04455	37263

x	$Si(x)$				
1	+	0,94608	30703	67183	01494
2	+	1,60541	29768	02694	84857
3	+	1,84865	25279	99468	25639
4	+	1,75820	31389	49053	05810
5	+	1,54993	12449	44674	13727
6	+	1,42468	75512	80506	53576
7	+	1,45459	66142	48093	59061
8	+	1,57418	68217	06942	05208
9	+	1,66504	00758	29602	49510
10	+	1,65834	75942	18874	04933



Druck der Philipp Reclam'schen Officin in Leipzig.

467.996

Bei **Wilhelm Engelmann** in Leipzig ist soeben ferner erschienen:

Lehrbuch
der
Weltgeschichte
mit Rücksicht auf
Cultur, Literatur und Religionswesen, und einem Abriß der deutschen Literaturgeschichte als Anhang
für
höhere Schulanstalten und zur Selbstbelehrung.

Von

Dr. Georg Weber,
Hauptlehrer an der höheren Bürgerschule in Heidelberg.

Zweiter unveränderter Abdruck.

gr. 8. 58 Bogen. Preis: $2^2/_3$ Thlr. — in Halbfranzband geb. 3 Thlr.

Unter den zahlreichen Lehrbüchern der Geschichte für die Jugend und zur Selbstbelehrung des gebildeten Bürgers zeichnet sich vorstehendes Werk eben so sehr durch sorgfältige und geschickte Bearbeitung des historischen Stoffes bei höchst anziehender Darstellung, als insonderheit durch die Behandlungsweise desselben aus. Es giebt ein treues und lebendiges Bild von dem Entwickelungsgange der Menschheit vom grauesten Alterthume bis auf unsere Zeit in politischer, religiöser und culturhistorischer Hinsicht, und unterscheidet sich eben dadurch, wie durch eine neue und fesselnde Anordnung des Stoffes von jenen Büchern, die nur die äußeren politischen Begebenheiten in chronologischer Ordnung ohne Darlegung des innern Zusammenhangs hinstellen, und Cultur und inneres Staatsleben wenig, Wissenschaft und Kunst gar nicht berücksichtigen und deshalb weniger geeignet sind, jugendliche Gemüther für das Studium der Geschichte zu gewinnen und mit Erfolg anzuregen. Des Verfassers Absicht war, „der empfänglichen Jugend und dem gebildeten Bürger ein Buch in die Hand zu geben, worin sie die ihnen nothwendige geschichtliche Belehrung in gedrungener Kürze vereinigt fänden, so daß das Staatsleben, das Religionswesen und die Culturzustände der bedeutendsten Völker aller Zeiten in ihren merkwürdigsten Perioden dargestellt würden, die neue und neueste Geschichte jedoch als die näher liegende eine umfassendere Behandlung erführe, als die des Mittelalters und der alten Welt." — Daß der Verfasser seinen Zweck erreicht hat, beweis't sowohl die schnelle Verbreitung des Werks, wovon in wenigen Monaten ein zweiter Abdruck nöthig wurde, als die günstige Beurtheilung in mehreren der geachtetsten literarischen und politischen Zeitschriften. Einer der Koryphäen in der Geschichtsforschung freut sich „in diesem Werke einer Vollständigkeit, Gediegenheit und Durchbildung zu begegnen, die von des Verfassers Berufe zum Lehrer der Geschichte in ihrem ganzen Umfange ein ehrenwerthes Zeugniß geben", und charakterisirt dann dasselbe weiter folgendermaßen: „Auf declamatorische oder sententiöse Abschweifungen hat der Verf. sich nicht eingelassen; er berichtet in schlichtem, würdigem Vortrage, was zur Sache gehört, versteht aber sein Urtheil mit kurzem Worte, mit einem Epitheton u. dergl. in die Erzählung zu verweben. Nur dadurch ist es möglich geworden, das ganze ungeheure Gebiet der politischen und Culturgeschichte ohne Verzicht auf Stylisirung in einer Vollständigkeit darzustellen, die nichts Wesentliches vermissen läßt, und von der neuen Geschichte an selbst eine ziemlich ausführliche Erzählung zu geben".

Eine schätzenswerthe, 100 Seiten starke Zugabe ist der Abriß der deutschen Literaturgeschichte im Anhang, der auch als Geschichte der deutschen Literatur einzeln zu $11^1/_2$ Ngr. zu haben ist.

Platons
Werke.

Griechisch und deutsch

mit

kritischen und erklärenden Anmerkungen.

In 27 Theilen.

1. Theil: Das Gastmahl. $^3/_4$ Thlr.
2. = Phädon. $^3/_4$ Thlr.
3. = Vertheidigung des Sokrates. $^1/_3$ Thlr.
4. = Euthyphron und Kriton. $^1/_3$ Thlr.
5. = Laches und Charmides. $^2/_3$ Thlr.
6. = Phädros. $^3/_4$ Thlr.
7. = Menexenos. $^1/_3$ Thlr.
8. = Hippias I. II. } sind unter der Presse.
9. = Lysis. }

Bibliotheca

scriptorum classicorum et graecorum et latinorum.

Alphabetisches Verzeichniss

derjenigen Ausgaben, Uebersetzungen und Erläuterungsschriften griechischer und lateinischer Schriftsteller, welche vom Jahre 1700 bis zu Ende des Jahres 1846 in Deutschland gedruckt worden sind.

Herausgegeben von Wilh. Engelmann.

Mit einer literar-historischen Uebersicht.

6te gänzlich umgearbeitete Auflage.

gr. 8. 1846. $2^1/_3$ Thlr.

Politische Gedichte

aus

der deutschen Vorzeit.

Von

Hoffmann von Fallersleben.

Mit dem wohlgetroffenen Bildniß von Hoffmann v. Fallersleben, gez. von Resch.

gr. 8. Brosch. $1^1/_2$ Thlr.

467,993

HAG 2 45124